

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MÉTHODES DE LESANT-RAVIART MODIFIÉES: APPLICATIONS
AU CALCUL DES SURFACES LIBRES

ALAIN BÉLIVEAU
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(MATHÉMATIQUES DE L'INGÉNIEUR)
AVRIL 1997

© Alain Béliveau, 1997.



National Library
of Canada

Acquisitions and
Bibliographic Services

395 Wellington Street
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Bibliothèque nationale
du Canada

Acquisitions et
services bibliographiques

395, rue Wellington
Ottawa ON K1A 0N4
Canada

Your file Votre référence

Our file Notre référence

The author has granted a non-exclusive licence allowing the National Library of Canada to reproduce, loan, distribute or sell copies of this thesis in microform, paper or electronic formats.

The author retains ownership of the copyright in this thesis. Neither the thesis nor substantial extracts from it may be printed or otherwise reproduced without the author's permission.

L'auteur a accordé une licence non exclusive permettant à la Bibliothèque nationale du Canada de reproduire, prêter, distribuer ou vendre des copies de cette thèse sous la forme de microfiche/film, de reproduction sur papier ou sur format électronique.

L'auteur conserve la propriété du droit d'auteur qui protège cette thèse. Ni la thèse ni des extraits substantiels de celle-ci ne doivent être imprimés ou autrement reproduits sans son autorisation.

0-612-32989-5

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée:

MÉTHODES DE LESAINT-RAVIART MODIFIÉES: APPLICATIONS AU
CALCUL DES SURFACES LIBRES

présentée par: BÉLIVEAU Alain

en vue de l'obtention du diplôme de: Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. PELLETIER Dominique, Ph.D., président

M. FORTIN André, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. GUÉNETTE Robert, Ph.D., membre

M. ZINE Abdelmalek, Ph.D., membre externe

À Maman et Papa

-

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier en premier lieu mon directeur de thèse Monsieur André Fortin dont la patience à mon égard m'a semblé infinie. J'apprécie sa jovialité ainsi que son côté plus sérieux qui ont permis des échanges d'idées cordiaux et fructueux. Je me dois de souligner le soutien financier dont il m'a fait bénéficier tout au long de cette thèse et surtout durant la dernière année où j'ai été dispensé de donner des charges de cours afin de mieux me concentrer sur la tâche à terminer. Son soutien moral a été constant et en fin de course, lorsque tout me semblait insurmontable et pénible, il m'a relevé avec une contribution directe à l'effort de rédaction qui de mon côté s'affaiblissait de jour en jour. Il a dû composer avec mon français écrit déficient et je sais comme cela a dû lui être agaçant. Sans broncher, il a mis l'épaule au mur qui se dressait devant moi. J'entends encore quelques pierres se fracasser dans leur chute et au travers de l'épais nuage de poussière, des flèches de soleil percent mon oeil mort. C'est le début d'un temps nouveau et pour cela je lui suis redevable.

Je remercie M. Robert Guénette, M. Dominique Pelletier et M. Abdelmalek Zine qui ont accepté de participer à ce jury de thèse et je leur suis reconnaissant de l'avoir lue dans d'aussi brefs délais.

Je ne peux passer sous silence mon excellent et vrai ami Mohammed Jardak, avec qui travail et plaisir ne faisaient qu'un. Nos routes se croiseront de nouveau, "on se fume une Mohammed !". Entre autres, j'inclus dans une agréable atmosphère de travail, traversée par d'étranges étrangers, les ultra copains Sylvain Chapleau, Hugues Delmers, José Teixeira, Donatien N'dri, Mourad Rajbaoui et Alain Lioret. D'excellentes discussions ponctuées de bonne humeur sont à la base de ces amitiés. Je réserve une bonne partie de ce paragraphe à mon "WIZ collègue", et j'ai nommé

le grand Steven Dufour, pour le remercier sincèrement pour la relecture de certains passages de ma thèse et les discussions très “à propos” dans les derniers milles. Je dois le remercier spécialement pour avoir réactivé *Mathematica* dans un moment de crise où il me fallait des résultats pour le lendemain et tout simplement pour son amitié. Je n’oublie pas de mentionner le nouveau et très sympathique “Sys. Admin.” Benoît Forest qui fait maintenant partie du groupe.

Je remercie aussi mes amis d’enfance et mon grand frère Paul car ils sont musicale à mes oreilles. En particulier, je souligne la contribution de Michel Williams à la correction finale de cette thèse et à la rédaction de la base de données nécessaire à la bibliographie. Je souligne les attentions spéciales que ma soeur Christianne a toujours eues à mon égard et le merveilleux don de clairvoyance de ma soeur Hélène qui d’un décisif coup de barre, “part vers d’autres rives”, rééguilla mon cap. Je n’ai pas modifié la topographie océanique, je suis “le vaisseau d’or” qui vogue loin du terrible destin qui devait être le sien.

Je m’excuse sincèrement auprès de mes soeurs, mes amis, mon frère et mes parents, qui ont tous subi (à un moment ou un autre) les foudres générées par ma paranoïa globale, mon mécontentement en effervescence, mon cafard sous contraintes tectoniques et mon malaise existentiel à sa masse critique.

Je remercie finalement mes parents qui ont dû supporter mon retour à la maison en fin de thèse, comme bagage, ce charmant coquetel Molotov d’émotions. Je m’incline devant leur patience légendaire.

RÉSUMÉ

Les méthodes de différences finies TVD et ENO en dimension 1 ainsi que leur généralisation aux dimensions supérieures fournissent d'excellents résultats pour les problèmes à caractère hyperbolique. Comment expliquer que les méthodes classiques d'éléments finis qui sont basées sur une formulation variationnelle soient si peu performantes pour les mêmes équations? Nous nous proposons dans cette thèse de faire ressortir certaines idées fondamentales développées en différences finies et de les adapter à la méthode des éléments finis.

En différences finies, c'est l'introduction d'interpolations discontinues judicieusement traitées, qui a mené au développement des schémas TVD et ENO. Cette thèse a pour but de démontrer qu'à partir de la méthode de Lesaint-Raviart (qui utilise elle aussi des approximations discontinues), on peut s'inspirer des schémas TVD et les adapter tout au moins partiellement à la méthode des éléments finis.

Nous développerons donc, à partir de la méthode de Lesaint-Raviart, de nouvelles méthodes qui tentent de limiter la génération et la propagation d'oscillations dans les équations de convection pure. Plusieurs pistes sont explorées: projections de la condition frontière, développement d'une méthode mixte et finalement développement d'une méthode dite bornée, dont les propriétés se rapprochent sensiblement des schémas ENO en différences finies.

Par la suite, on compare les méthodes développées sur un problème simple pour ne retenir que les plus prometteuses: les méthodes mixte et bornée. On applique ensuite les méthodes retenues à des problèmes de surfaces libres et plus particulièrement aux problèmes de coextrusion, de remplissage de moules et à des écoulements

principalement régis par la tension superficielle. Ce faisant, nous introduisons une nouvelle façon de calculer le terme de tension superficielle.

ABSTRACT

TVD and ENO finite difference methods used in one dimension and their generalization to higher dimensions and to systems produce excellent results for hyperbolic problems. How can one explain the bad performance of classical finite element methods (which are based on a variational formulation) for the same equations? In this thesis, we would like to adapt fundamental and successful ideas from finite differences to the finite element method.

Using appropriately treated discontinuous interpolations, one gets in the finite difference field the now well known TVD and ENO schemes. The main goal of this thesis is to demonstrate that, using the Lesaint-Raviart method (which is also based on discontinuous approximations), one can be inspired by the ideas put forward in the finite difference field and transpose them at least partially to the finite element method.

We will thus develop some new methods, based on the Lesaint-Raviart method, which limits the generation and propagation of oscillations in the numerical solution of pure convection problems. Many possibilities are explored: projections of the boundary condition at the entrance of the domain, development of a new mixed method and finally we propose a so called bounded method whose properties are similar the those of TVD schemes.

Subsequently, we compare these new methods on a simple problem, only to retain the best two: the mixed and the bounded methods. We then apply them to free boundary problems. In particular we consider the coextrusion of two polymers

and we compute injection molding problems. Finally, we apply our methods to problems where surface tension plays a major role. Doing so, we introduce a new way to compute the contribution of the surface tension term.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
RÉSUMÉ	vii
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	xi
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xv
INTRODUCTION	1
CHAPITRE 1 Position du problème	5
1.1 Description du problème, motivation et applications	5
1.2 Méthodes TVD, TVB et ENO	8
1.3 La notion d' <i>upwinding</i>	10
CHAPITRE 2 “Upwinding” en différences finies	12
2.1 Différences finies: méthodes TVD	13
2.1.1 Une méthode d'ordre un: le schéma de Godunov	13
2.1.2 Une méthode d'ordre deux: le schéma de Lax-Wendroff	18

CHAPITRE 3 “Upwinding” en éléments finis.....	28
3.1 Stabilité des méthodes d’élément finis.....	34
 CHAPITRE 4 Étude de la méthode de Galerkin discontinue.....	39
4.1 Le problème de convection en dimension infinie.....	40
4.1.1 Démonstration des lemmes.....	50
4.2 Le problème de convection en dimension finie.....	53
 CHAPITRE 5 Quelques méthodes possibles.....	60
5.1 Méthode de viscosité artificielle discontinue.....	60
5.2 La méthode de Lesaint-Raviart modifiée.....	65
5.3 La méthode mixte discontinue.....	66
5.4 La méthode bornée.....	67
5.5 Méthodes de Lesaint-Raviart et mixte sur <i>Mathematica</i>.....	69
 CHAPITRE 6 Modélisation et résultats numériques.....	81
6.1 Modélisation du problème.....	82
6.1.1 Les équations de Stokes.....	82
6.1.2 Condition de non-miscibilité et d’équilibre à l’interface.....	84
6.1.3 Formulation variationnelle.....	85

6.2 Coextrusion	93
6.2.1 Le cas newtonien: résultats pour les différentes méthodes	93
6.2.2 Contraction: cas non newtonien et viscoélastique	118
6.2.3 Écoulement viscoélastique dans une géométrie en T	124
6.3 Moulage	128
6.4 Tension superficielle	140
6.4.1 La loi de Laplace	145
6.4.2 Déformation d'une gouttelette	147
6.4.2.1 Test # 1	154
6.4.2.2 Test # 2	154
6.4.2.3 Test # 3	156
6.4.2.4 Test # 4	158
CONCLUSION	162
BIBLIOGRAPHIE	167

LISTE DES TABLEAUX

5.1	Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$ et $d_K = 0$	72
5.2	Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$ et $d_K = 1/3$	73
5.3	Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ et $d_K = 0$	75
5.4	Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ et $d_K = 1/3$	76
5.5	Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 100)$ et $d_K = 0$	79
6.1	Liste des discrétisations	91
6.2	Liste des paramètres	125
6.3	Vérification de la loi de Laplace	147

LISTE DES FIGURES

2.1	<i>Projection constante par morceaux de la condition initiale.</i>	14
2.2	<i>Contour d'intégration pour le schéma de Godunov et deux problèmes de Riemann sans interaction (cas de deux zones de raréfaction).</i>	15
2.3	<i>Interaction entre deux problèmes de Riemann: indétermination de la fonction en t^{n+1}.</i>	16
2.4	<i>Schéma de Godunov dans le cas particulier où $u > 0$.</i>	17
2.5	<i>(1) Projection sur les constantes par morceaux.</i>	17
2.6	<i>(2) Transport exact de (1) pour $u > 0$ ($\Delta t = 2\Delta x$).</i>	18
2.7	<i>Reconstruction linéaire à partir de la projection constante par morceaux.</i>	20
2.8	<i>Calcul du flux le long du côté $x_{j-1/2}$.</i>	20
2.9	<i>Condition limite approchée linéaire.</i>	24
2.10	<i>Transport exact.</i>	24
2.11	<i>Projection sur les constantes par morceaux (pointillés).</i>	24
2.12	<i>Limiteur de pentes de Roe (conserve la monotonie et ne crée pas de nouveaux extrêmes).</i>	26
2.13	<i>Un cas limite pour le limiteur de pentes de Roe.</i>	26
3.1	<i>Solution de (3.2) avec $\epsilon \neq 0$ et $\epsilon = 0$ ($u > 0$ et $u < 0$).</i>	30
3.2	<i>Solution analytique et numérique dans le cas où $\epsilon = uhL/2$.</i>	31
4.1	<i>Équivalence des partitions sur $\partial\Omega^-$ et sur $\partial\Omega^+$.</i>	59
5.1	<i>L'apparition d'un fort gradient.</i>	61
5.2	<i>L'apparition d'une discontinuité à la jonction de deux canaux.</i>	61
5.3	<i>Problème test.</i>	69
5.4	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$.</i>	72
5.5	<i>Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$.</i>	73

5.6	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.</i>	74
5.7	<i>Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.</i>	74
5.8	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$.</i>	75
5.9	<i>Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$.</i>	76
5.10	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.</i>	77
5.11	<i>Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.</i>	77
5.12	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 100)$.</i>	78
5.13	<i>Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 100)$.</i>	79
6.1	<i>Domaine Ω coupé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 par l'interface Γ.</i>	88
6.2	<i>Méthode de Lesaint-Raviart originale.</i>	94
6.3	<i>Lignes de niveau de la pseudo-concentration pour la méthode de Lesaint-Raviart originale.</i>	95
6.4	<i>Coupe en sortie pour la méthode de Lesaint-Raviart originale.</i>	95
6.5	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur ∂K.</i>	98
6.6	<i>Lignes de niveau de f pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur ∂K.</i>	99
6.7	<i>Coupe en sortie pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur ∂K.</i>	99
6.8	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K.</i>	100
6.9	<i>Méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K.</i>	101
6.10	<i>Coupe en sortie pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K.</i>	101
6.11	<i>Projection qui ne conserve pas la monotonie (la masse ?).</i>	102

6.12	<i>Méthode SUPG par élément.</i>	103
6.13	<i>Méthode SUPG par élément.</i>	104
6.14	<i>Coupe en sortie pour la méthode SUPG par élément.</i>	104
6.15	<i>Méthode SUPG par élément avec projection bornée sur ∂K.</i>	105
6.16	<i>Méthode SUPG par élément avec projection bornée sur ∂K.</i>	106
6.17	<i>Coupe en sortie pour la méthode SUPG par élément avec projection bornée sur ∂K.</i>	106
6.18	<i>Illustration géométrique en dimension un du détecteur d'irrégularités.</i>	107
6.19	<i>Faute du détecteur d'irrégularités.</i>	107
6.20	<i>Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$.</i>	108
6.21	<i>Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$.</i>	108
6.22	<i>Coupe en sortie pour la méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$.</i>	109
6.23	<i>Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-3}$.</i>	110
6.24	<i>Coupe en sortie pour la méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-3}$.</i>	110
6.25	<i>Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$ et projection bornée sur ∂K.</i>	111
6.26	<i>Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$ et projection bornée sur ∂K.</i>	111
6.27	<i>Coupe en sortie pour la méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$ et projection bornée sur ∂K.</i>	112
6.28	<i>Méthode mixte.</i>	113
6.29	<i>Coupe en sortie pour la méthode mixte.</i>	113
6.30	<i>Méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes.</i>	114
6.31	<i>Méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes.</i>	115

6.32	<i>Coupe en sortie pour la méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes.</i>	115
6.33	<i>Méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes et projection de f bornée sur ∂K^-.</i>	116
6.34	<i>Méthode mixte avec avec projection du champ de vecteurs sur les constantes et projection de f bornée sur ∂K^-.</i>	117
6.35	<i>Coupe en sortie pour la méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes et projection de f bornée sur ∂K^-.</i>	117
6.36	<i>Position de l'interface: méthode de Lesaint-Raviart originale.</i>	119
6.37	<i>Dispersion de l'interface: méthode de Lesaint-Raviart originale.</i>	119
6.38	<i>Graphe de f: méthode de Lesaint-Raviart originale.</i>	120
6.39	<i>Dispersion de l'interface: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	120
6.40	<i>Graphe de f: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	121
6.41	<i>Position des 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	122
6.42	<i>Agrandissement des 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	123
6.43	<i>Position 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	123
6.44	<i>Agrandissement des 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	124
6.45	<i>Premier maillage pour l'écoulement dans un T.</i>	125
6.46	<i>Deuxième maillage pour l'écoulement dans un T.</i>	126
6.47	<i>Position des 4 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	127
6.48	<i>Position des 4 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.</i>	128
6.49	<i>Trajectoires et position de l'interface: maillage N°1 et $D_e = 0$.</i>	129
6.50	<i>Trajectoires et position de l'interface: maillage N°1 et $D_e = 1.7$.</i>	130
6.51	<i>Trajectoires et position de l'interface: maillage N°2 et $D_e = 0$.</i>	131
6.52	<i>Trajectoires et position de l'interface: maillage N°2 et $D_e = 1.7$.</i>	132

6.53	<i>Position du front (flux libre), maillage 1.</i>	133
6.54	<i>Position du front (flux libre), maillage 2.</i>	133
6.55	<i>Position du front (flux libre), maillage 3.</i>	134
6.56	<i>Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.</i>	134
6.57	<i>Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.</i>	134
6.58	<i>Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.</i>	135
6.59	<i>Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.</i>	135
6.60	<i>Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.</i>	135
6.61	<i>Position du front (flux sortant), maillage 1.</i>	137
6.62	<i>Position du front (flux sortant), maillage 2.</i>	137
6.63	<i>Position du front (flux sortant), maillage 3.</i>	138
6.64	<i>Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.</i>	138
6.65	<i>Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.</i>	138
6.66	<i>Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.</i>	139
6.67	<i>Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.</i>	139
6.68	<i>Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.</i>	139
6.69	<i>Géométrie, conditions aux frontières et initiales.</i>	145
6.70	<i>Maillage N° 1.</i>	146
6.71	<i>Maillage N° 2.</i>	146
6.72	<i>Interface ($f = 0.5$) et lignes de courant pour le maillage N° 1.</i>	147
6.73	<i>Interfaces ($f = 0.5$) et lignes de courant pour le maillage N° 2 à différents temps.</i>	148
6.74	<i>Distribution de la pression pour le maillage N° 1.</i>	149
6.75	<i>Distribution de la pression pour le maillage N° 2.</i>	149
6.76	<i>La pseudo-concentration vu de biais pour le maillage N° 2.</i>	150
6.77	<i>Géométrie, conditions aux frontières et initiales.</i>	150
6.78	<i>Maillage N° 1.</i>	153

6.79	<i>Maillage N° 2</i>	153
6.80	<i>Cas N° 1. maillage 1</i>	155
6.81	<i>Cas N° 1. maillage 2</i>	155
6.82	<i>Cas N° 2. maillage 1</i>	156
6.83	<i>Cas N° 2. maillage 2</i>	157
6.84	<i>Cas N° 3. maillage 1</i>	158
6.85	<i>Cas N° 3. maillage 2</i>	159
6.86	<i>Cas N° 4. maillage 1</i>	160
6.87	<i>Cas N° 4. maillage 2</i>	160
6.88	<i>Cas N° 4. maillage 2</i>	161

INTRODUCTION

Il y a très longtemps que l'on sait résoudre, à une précision d'ordre un, le problème de convection en différences finies. Les techniques utilisées pour construire de tels schémas sont basées sur la notion "d'upwinding". Depuis environ 15 ans on sait comment produire des schémas d'ordre supérieur de convergence qui:

- (a) sont consistants:
- (b) sont sous forme conservative:
- (c) sont du second ordre dans les régions lisses (au pire du premier ordre pour quelques points isolés).
- (d) sont stables pour une forme discrète de la variation totale (pas d'oscillations parasites), c'est-à-dire qu'ils ont une borne sur la variation totale de la solution numérique, du moins dans le cas scalaire et pour les systèmes linéaires unidimensionnels:
- (e) préservent la monotonie:
- (f) conservent des discontinuités discrètes monotones stables et abruptes.
- (g) convergent vers l'unique solution qui satisfait une forme géométrique et/ou analytique de la condition d'entropie (pas de solution non physique).

On réfère le lecteur aux articles de Osher [54], Osher et Chakravarthy [55], Yee, Warming et Harten [76] pour les détails concernant ces propriétés. Ces méthodes sont toutes englobées dans la notion de schémas TVD. Plus récemment les méthodes ENO ont vu le jour. Bien que ces méthodes ne satisfont pas encore une liste aussi

impressionnante de *propriétés physiques*, elles sont tout de même essentiellement non oscillatoires (d'où l'abréviation ENO en anglais) et sont globalement du second ordre ou plus. Cependant, ces méthodes ENO semblent satisfaire elles aussi cette liste puisque les solutions obtenues sont comparables sinon meilleures (à cause de leur précision du second ordre global) que celles obtenues par les méthodes TVD. De plus, même si des preuves des propriétés de cette liste sont à notre connaissance inexistantes pour les cas de dimension supérieure et les systèmes non linéaires, la généralisation des techniques TVD et ENO aux cas mentionnés fournit d'excellents résultats. De plus, les méthodes TVD sont au plus du second ordre alors que les méthodes ENO peuvent être aussi précises que l'on veut. Finalement, soulignons que Godunov [29] a démontré qu'une méthode linéaire qui préserve la monotonie est au plus d'ordre 1. Les méthodes TVD et ENO sont donc forcément non linéaires (voir Harten [33] et Harten-Osher [34]) et on doit s'attendre à cette non-linéarité pour les méthodes d'éléments finis qui préserve la monotonie.

Pour la résolution de problèmes de nature hyperbolique, les méthodes d'éléments finis pour leur part semblent avoir pris un certain retard par rapport à leurs contre-parties en différences finies. Il semble que les méthodes d'éléments finis n'en sont qu'au stade de "l'upwinding". En général les méthodes d'éléments finis satisfont aisément les conditions (a), (b) et (c) globalement. Le but poursuivi dans cette thèse est de reproduire la condition (d). La condition (e) ne sera qu'effleurée alors que (f) et (g) ne seront pas considérées.

Le programme est donc le suivant. Dans le premier chapitre on introduit le problème général que l'on veut résoudre. On suivra avec un bref rappel sur les notions de schémas TVD et ENO en différences finies et l'état des développements en éléments finis. Le second chapitre traitera plus en détail de la notion de schéma

TVD et cela dans le but d'en tirer des conclusions que l'on veut appliquer par la suite aux éléments finis. Le chapitre trois traite plus en détail de la notion d'upwinding en éléments finis et tente de dégager les lacunes par rapport aux mêmes idées en différences finies. Le quatrième chapitre se veut une étude plus approfondie des défauts de la méthode "upwind" de Lesaint-Raviart qui servira de point de départ au développement de toutes les nouvelles méthodes de cette thèse. Pour ce faire, dans la première partie on construit une *version continue* de la méthode de Lesaint-Raviart dans un espace de dimension infinie et on démontre l'existence et l'unicité d'une solution par le biais d'une nouvelle méthode mixte. De cette étude on tire des conclusions sur les conditions frontières admissibles et la régularité du champ de vecteurs nécessaire pour avoir un problème bien posé. Dans la seconde partie on démontre l'existence et l'unicité de la méthode de Lesaint-Raviart (cas discret) et on étudie les raisons pour lesquelles il y a génération de solutions oscillatoires. On montrera que la génération d'oscillations est due à la nature finie des espaces de discrétisation et qu'évidemment, dans la liste des raisons, on retrouve une forme discrète des conditions établies dans le cas *continu*. Une fois les mécanismes générateurs d'oscillations repérés, on introduit au chapitre 5 des solutions possibles à ce problème suivies d'une comparaison entre certaines formulations à l'aide de *Mathematica*. Le sixième et dernier chapitre se penche sur la validation numérique de la plupart des solutions envisagées au chapitre précédent et aux calculs de plusieurs problèmes de surfaces libres. En premier lieu on présente une modélisation générale des problèmes envisagés et par la suite on présente les résultats numériques. Les problèmes que l'on résout numériquement sont les suivants:

- (a) coextrusion de deux fluides newtoniens dans une géométrie simple (validation des méthodes proposées et choix de l'une d'entre elles pour le reste des problèmes tests);

- (b) Coextrusion de deux fluides dans une géométrie complexe, cas newtonien / viscoplastique (modèle de Carreau) et newtonien/viscoélastique (de type PTT):
- (c) Coextrusion dans une géométrie en T d'un fluide newtonien et d'un fluide viscoélastique de type Oldroyd-B:
- (d) Moulage par injection d'un fluide newtonien:
- (e) Modélisation originale des effets de la tension superficielle.

Finalement, on terminera cette thèse par une conclusion concernant surtout les méthodes proposées pour la solution des problèmes de convection pure.

CHAPITRE 1

Position du problème

1.1 Description du problème, motivation et applications

Cette thèse est principalement vouée à la construction d'une méthode d'éléments finis pour résoudre le problème de convection suivant:

$$\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla f(\vec{x}, t) = s(\vec{x}, t), \quad \forall (\vec{x}, t) \in \Omega \times T \quad (1.1)$$

où Ω est le domaine des variables spatiales et T celui de la variable temporelle. Le problème (1.1) est bien posé lorsqu'il est sujet à la condition initiale:

$$f(\vec{x}, 0) = f_0(\vec{x}) \quad (1.2)$$

et à une condition aux limites:

$$f(x, t) = f^-(x, t) \text{ sur } \partial\Omega^- \quad (1.3)$$

où:

$$\partial\Omega^- \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{x} \in \partial\Omega \mid \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) < 0 \}$$

et où on définit également:

$$\partial\Omega^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{x} \in \partial\Omega \mid \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) > 0 \}$$

$$\partial\Omega^o \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{x} \in \partial\Omega \mid \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}, t) = 0 \}$$

Dans cette équation, $\vec{u}(\vec{x}, t) = (u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t))$ est un champ de vitesses qui est généralement obtenu en solutionnant les équations de Navier-Stokes, $s(\vec{x}, t)$ est un

terme source. $\vec{n}(\vec{x}, t)$ est la normale extérieure à Ω et finalement $\vec{x} = (x_1, x_2)$ est le vecteur position.

Une fois une telle méthode obtenue, on pourra l'utiliser pour la simulation numérique de divers procédés de mise en forme des polymères tels la coextrusion et le moulage par injection puisque l'équation (1.1) intervient dans la modélisation de tels écoulements. Les méthodes seront aussi en mesure de simuler des phénomènes tels l'effet fontaine ainsi que des écoulements extrêmement complexes principalement dominés par la tension superficielle entre deux fluides. Pour la modélisation de ce type de problèmes il est nécessaire de connaître la position des interfaces séparant les différents fluides présents dans l'écoulement. Pour ce faire au moins deux stratégies sont utilisées: lagrangienne (évolution des interfaces) et eulérienne (détermination des interfaces *a posteriori*).

La première stratégie reproduit l'évolution des interfaces. En effet, certains noeuds du maillage sont identifiés avec la position initiale des différentes interfaces et une méthode lagrangienne est utilisée pour déterminer leur évolution. Ainsi, la position des interfaces est directement obtenue. L'application d'une telle méthode modifie considérablement le maillage et de temps à autre il est nécessaire de réorganiser celui-ci en figeant l'interface. Il s'ensuit une restucturation complète du reste du maillage. Lorsque deux fluides se rencontrent (en moulage par injection par exemple) la méthode éprouve des difficultés majeures puisqu'il est difficile de modéliser correctement la collision des noeuds à la ligne de fusion. Le lecteur peut se référer à Crochet [52] où la méthode lagrangienne est utilisée pour la prédiction du gonflement en sortie de filière. Cependant, puisque l'interface est connue en tout temps cette méthode facilite l'imposition d'une condition d'interface comme lors de la prise en compte des effets de la tension superficielle.

La méthode eulérienne utilise un maillage unique et reproduit les interfaces via une fonction f , dite de pseudo-concentration, qui est calculée dans tout le domaine. Les différentes interfaces sont extraites de la fonction de pseudo-concentration en les identifiant à certaines isovaleurs de f et en suivant leur évolution. Dans ce cas, la fusion de deux fluides ne présente aucune difficulté particulière. Cependant, cette méthode nécessite l'introduction d'une équation aux dérivées partielles supplémentaire de type hyperbolique de la forme (1.1), où f représente la fonction de pseudo-concentration transportée dans le domaine. De plus, une modélisation volumique des phénomènes d'interfaces doit être élaborée pour tenir compte par exemple de la tension superficielle. Cette stratégie fut adoptée pour la méthode VOF, "Volume of Fluid", de Hirt et Nichols [37] ainsi que pour la méthode de pseudo-concentration de Thompson [66], de Thompson-Smelser [67] et dans Lafaurie *et al.* [45]. On réfère le lecteur à l'excellent article de Shen [63] pour une revue complète dans le cadre du moulage par injection. C'est cette dernière méthode que nous emploierons dans cette thèse.

Malgré la forme simple de (1.1)-(1.2)-(1.3), l'approximation numérique de l'équation (1.1) est loin d'être directe. En effet, il est bien connu que les méthodes classiques de différences finies ou d'éléments finis ne sont pas stables ou sont trop grossières. En général, les solutions numériques du problème (1.1) présentent des oscillations indésirables ou de la diffusion excessive. Cette remarque nous fait réfléchir sur la possibilité de multiplication ou de perte d'isovaleurs conduisant à une confusion sur la véritable positions des interfaces. Puisque les propriétés rhéologiques des différents polymères sont déduites de la fonction f , des oscillations peuvent conduire à des situations non physiques comme des viscosités négatives. Une pseudo-concentration oscillatoire introduit des erreurs, ce qui n'est jamais apprécié

lors de la résolution d'équations non linéaires. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes plus sophistiquées pour résoudre (1.1). En différences finies on a créé des méthodes d'ordre deux ou plus qui satisfont une certaine forme de stabilité. Le but de cette thèse est de présenter une version modifiée de la méthode Galerkin discontinue (introduite par Lesaint et Raviart [49]) qui intégrera les idées de base utilisées dans la construction des méthodes stables et précises en différences finies.

1.2 Méthodes TVD, TVB et ENO

Il y a environ une quinzaine d'années, les méthodes dites TVD (total-variation-diminishing), TVB (total-variation-bounded) et ENO (essentially non-oscillatory) sont apparues dans le domaine des différences finies (voir entre autres Chakravarthy [8], Davis [14] et Yee-Warming-Harten [76]). Pour discuter de ces méthodes on utilise une version simplifiée (unidimensionnelle) du problème (1.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0, & \forall (x,t) \in I \times T \\ f(x,0) = f_0(x) & \forall x \in I \end{cases}$$

Dans ce cas, on sait que pour la solution continue aucun nouveau minimum (maximum) ne sera créé et que les minima (maxima) déjà existants ne décroîtront pas (n'augmenteront pas). Ces deux dernières propriétés entraînent que la variation totale est non croissante (voir Lax-Wendroff [47]). La variation totale dans le cas continu est donnée par:

$$TV(f(t)) = \max_{\Delta x \in \Delta} \left\{ \sum_{x_j \in \Delta x} |f(x_{j+1}, t) - f(x_j, t)| \right\}$$

où x_j est le $j^{ième}$ point de la partition Δx , et Δ est l'ensemble de toutes les partitions possible. Dans le cas discret on espère obtenir une méthode qui satisfait un analogue de ce concept de stabilité. On définit la notion de variation totale discrète de la façon

suivante:

$$TV(f^n) = \sum_j |f_{j+1}^n - f_j^n|$$

où $f_j^n = f(x_j, t^n)$ avec x_j le $j^{ième}$ point de la discrétisation et t^n le $n^{ième}$ pas de temps. On dira qu'une méthode est TVD si elle satisfait:

$$TV(f^{n+1}) \leq TV(f^n) \quad \forall n, \Delta t \text{ tels que } 0 \leq n\Delta t \leq T$$

et qu'une méthode est TVB si:

$$TV(f^{n+1}) \leq B \quad \forall n, \Delta t \text{ tels que } 0 \leq n\Delta t \leq T$$

où B dépend uniquement de $TV(f^0)$. On conjecture de plus (voir Harten [33] et Harten-Osher [34]) qu'une méthode est ENO (presque TVD) si:

$$TV(f^{n+1}) \leq TV(f^n) + \mathcal{O}(h^{1+p}) \quad \forall n, \Delta t \text{ tels que } 0 \leq n\Delta t \leq T$$

pour un certain $p > 0$.

Ces méthodes découlent principalement des concepts pionniers de Van Leer [70, 71, 72, 73, 74] qui ont menées aux schémas MUSCL (*monotone upwind schemes for conservation laws*). L'avantage principal de ces types de schémas numériques est qu'ils vérifient tous un analogue de la stabilité liée à la variation totale. Cependant tous ces concepts ne sont valables que lorsque l'équation (1.1) est unidimensionnelle. Des résultats de stabilité sont possibles dans le cas des systèmes linéaires en dimension supérieure (préservation de la monotonie). Les méthodes TVD peuvent être d'un ordre de précision très élevée mais une dégradation de leur précision est inévitable près des discontinuités. Les méthodes TVB sont aussi très précises et leur ordre de précision est global. Les méthodes ENO peuvent être extrêmement précises mais les preuves de convergence et de stabilité sont inexistantes à notre connaissance. Il en est de même pour la généralisation de ces méthodes au cas non linéaire (multidimensionnel) mais leur utilisation donnent d'excellents résultats [76].

1.3 La notion d'*upwinding*.

L'expérience obtenue en différences finies nous montre qu'il n'est pas suffisant d'approximer (1.1) mais qu'il faut de plus que cette méthode d'approximation tienne compte de l'aspect physique (la solution est liée à une famille de courbes dites caractéristiques) de la solution. En gros, cela veut dire que la méthode d'éléments finis doit modéliser d'une façon ou d'une autre le fait que l'information de la solution de (1.1) se trouve le long des caractéristiques. Autrement dit, le schéma numérique doit utiliser l'information la plus pertinente possible et cette dernière se trouve en remontant les caractéristiques. Ces quelques lignes définissent la notion d'*upwinding*. Cette notion d'*upwinding* est en général à la base des méthodes numériques suivantes:

- (a) TVD. TVB. ENO (différences finies).
- (b) SU. SUPG. Lesaint-Raviart (éléments finis).

Cependant, ce qui vient d'être dit dans le paragraphe précédent montre que le schéma recherché doit satisfaire un analogue de la stabilité basé sur la variation totale de la condition frontière. Ce genre de considération est à notre connaissance inexistant en éléments finis. On ajoute que la majorité des méthodes mentionnées en (a) sont basées sur la résolution exacte de (1.1) et sur une approximation de (1.2) non oscillatoire et qui conserve la masse.

En conclusion, on cherche une méthode d'éléments finis pour solutionner (1.1)-(1.2) qui mime ou conserve un maximum de propriétés de la solution continue et de la condition frontière. Ces propriétés ne doivent cependant pas dépendre de la

partition utilisée (taille des éléments).

CHAPITRE 2

“Upwinding” en différences finies

Dans ce chapitre on cherche à résoudre numériquement l'équation de transport unidimensionnelle non linéaire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}(f)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

avec la condition initiale:

$$f(x, 0) = f_0(x) \quad (2.2)$$

dont la forme la plus générale est celle des systèmes conservatifs:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n_d} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}_i(\vec{f})}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{f}(\vec{x}, 0) = \vec{f}_0(\vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{R}^{n_d}$$

avec $\vec{f} = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), \dots, f_m(\vec{x}, t))^T$, $\vec{\mathcal{F}}_i(\vec{f}) = (g_1^i(\vec{f}), g_2^i(\vec{f}), \dots, g_m^i(\vec{f}))^T$ des vecteurs de dimension m , $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_d})$ où n_d représente la dimension spatiale et $\vec{f}_0(\vec{x})$ une fonction vectorielle prescrite sur Ω .

Il est suffisant pour atteindre les objectifs de ce chapitre de considérer (2.1) et les conclusions obtenues seront utiles pour construire la méthode d'éléments finis désirée. Cette restriction se justifie par un raisonnement très simple. Si une solution numérique n'arrive pas à résoudre correctement (2.1), comment peut-on espérer que la généralisation de cette méthode réagisse correctement pour (2.3) où en plus du caractère non linéaire, la complexité mathématique augmente avec la dimension spatiale. Une autre raison de se limiter à (2.1) est que dans ce cas les propriétés

de la solution analytique sont bien connues (voir [47]) et on dira que ce sont des *propriétés physiques*. Ces *propriétés physiques* ont des analogies directes dans le cas discret et génèrent ainsi différents concepts qui, lorsqu'incorporés dans des schémas de différences finies, produisent les méthodes les plus stables pour résoudre (2.1). De plus, l'expérience d'une quinzaine d'années en différences finies montre que si on s'assure que la solution numérique de (2.1) possède ces *propriétés physiques* alors la généralisation des méthodes à (2.3) fournit d'excellents résultats.

Une revue de ces différents concepts est le but de ce chapitre. Les méthodes pour résoudre (2.3) sont souvent des méthodes dites "d'upwinding" même si le lien direct avec la notion d'upwinding est souvent vague. On retrouve cette technique "d'upwinding" à ses débuts dans Godunov [29] en différences finies et dans Zienkiewicz[77] pour les éléments finis.

2.1 Différences finies: méthodes TVD.

2.1.1 Une méthode d'ordre un: le schéma de Godunov

Les fondements de l'"upwinding" dans le domaine des différences finies se retrouvent dans la construction du schéma de Godunov. On veut résoudre le problème de convection unidimensionnel non linéaire (2.1). En premier lieu on doit définir à chaque pas de temps une fonction discrète (la plus simple possible) pour remplacer la condition initiale. On écrira donc:

$$\bar{f}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} f(x, t^n) dx \quad (2.4)$$

où $f(x, t^0) = h(x)$, $t^0 = 0$, $t^n = t^0 + n\Delta t$ et $x_{j+\gamma} = x_j + \gamma\Delta x$ avec $\gamma \in \{-1/2, 1/2\}$. La figure 2.1 montre une projection constante dans chaque intervalle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$. Il est à noter que (2.4) conserve la "masse linéique" (aire sous la courbe) et ne crée

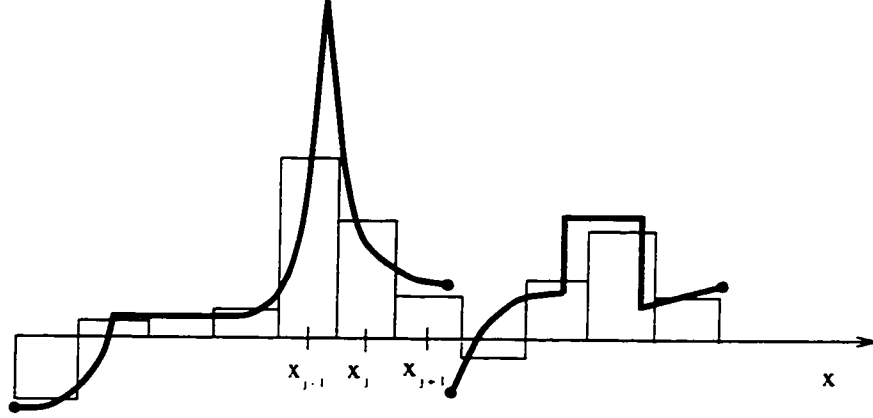


Figure 2.1 *Projection constante par morceaux de la condition initiale.*

jamais de nouveaux maxima ou minima. En effet:

$$\int_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} \bar{f}_j^n dx = \Delta x \bar{f}_j^n = \int_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} f(x, t^n) dx \quad (2.5)$$

et en utilisant le théorème de la moyenne:

$$\min \{f(t^n, x) | x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]\} \leq \bar{f}_j^n \leq \max \{f(t^n, x) | x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]\} \quad (2.6)$$

ce qui montre bien qu'aucun extrema ne peut survenir. On introduit les notations suivantes: $\nabla_t = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})$, $\vec{n}_t = (n_x, n_t)$ et $\Omega_j \times I^{n+1/2} = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}] \times [t^n, t^{n+1}]$, alors en intégrant (2.1) sur $\Omega_j \times I^{n+1/2}$ (voir la figure 2.2), on a:

$$\int_{\Omega_j \times I^{n+1/2}} \nabla_t \cdot (\mathcal{F}(f), f) dx dt = 0$$

Par le théorème de divergence ceci devient:

$$\int_{\partial(\Omega_j \times I^{n+1/2})} (\mathcal{F}, f) \cdot \vec{n}_t ds = 0$$

ou encore (voir encore la figure 2.2):

$$\begin{aligned} & - \int_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} f(s, t^n) ds + \int_{[t^n, t^{n+1}]} \mathcal{F}(f(x_{j+1/2}, s)) ds \\ & + \int_{[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]} f(s, t^{n+1}) ds - \int_{[t^n, t^{n+1}]} \mathcal{F}(f(x_{j-1/2}, s)) ds = 0 \end{aligned}$$

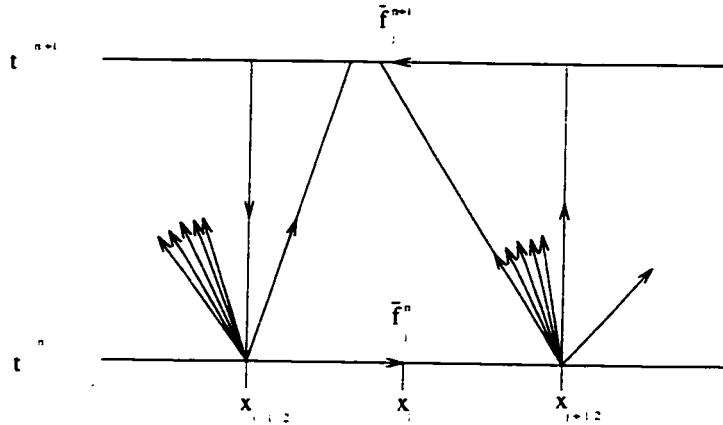


Figure 2.2 Contour d'intégration pour le schéma de Godunov et deux problèmes de Riemann sans interaction (cas de deux zones de raréfaction).

En divisant par Δx , en utilisant l'approximation (2.4) et en réorganisant les termes on trouve:

$$\bar{f}_j^{n+1} = \bar{f}_j^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{[t^n, t^{n+1}]} (\mathcal{F}(f(x_{j+1/2}, s)) - \mathcal{F}(f(x_{j-1/2}, s))) ds \quad (2.7)$$

Si $f(x_{j-1/2}, s)$ et $f(x_{j+1/2}, s)$ étaient connus pour tout $s \in [t^n, t^{n+1}]$, on pourrait calculer les intégrales intervenant dans (2.7). Heureusement, chaque côté $x_{j-1/2}$ et $x_{j+1/2}$ au temps t^n sépare deux "états" constants respectivement $\{f_{j-1}^n, f_j^n\}$ et $\{f_j^n, f_{j+1}^n\}$. La recherche de la solution dans l'espace et le temps de (2.3) avec comme conditions initiales les "états" mentionnés ci-haut constitue un problème dit de Riemann. Ce problème de Riemann se résout numériquement, à un coup très élevé, et fournit ainsi les valeurs recherchées en $x_{j-1/2}$ et $x_{j+1/2}$ pour $t \geq t^n$. Puisque le problème de Riemann n'est résolu qu'approximativement, il est intéressant de voir jusqu'à quel point la précision de la solution numérique affecte le schéma global. En se basant sur cette idée, des chercheurs ont élaboré des solveurs de Riemann moins précis mais surtout moins coûteux, qui ne dégradent pas la méthode de Godunov mais augmente grandement sa rapidité globale. On consultera à cet effet P. L. Roe [60] et [9] qui présente des schémas basés sur des solveurs de Riemann approchés qui sont très efficaces. La solution d'un solveur de Riemann donné sera notée

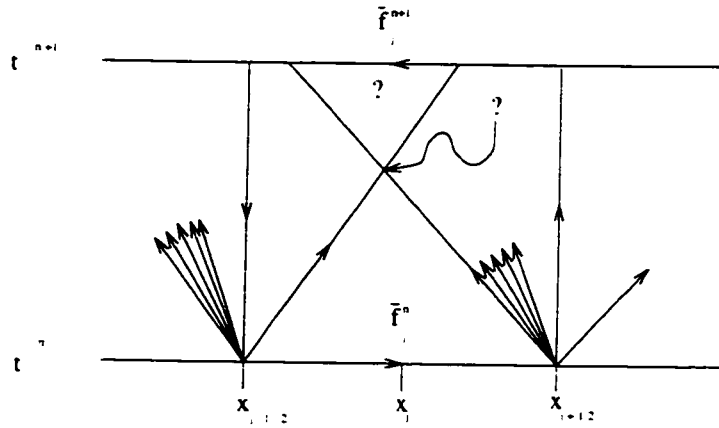


Figure 2.3 *Interaction entre deux problèmes de Riemann: indétermination de la fonction en t^{n+1} .*

par $R(x_{j\pm 1/2}, t)$. Le pas Δt doit être choisi suffisamment petit afin que les problèmes de Riemann adjacents restent indépendants les uns des autres. C'est la condition classique de Courant-Friedrich-Levy ou condition CFL (voir les figures 2.2 et 2.3). En multipliant et en divisant l'intégrale de (2.7) par Δt , on peut maintenant écrire:

$$\bar{f}_j^{n+1} = \bar{f}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{\mathcal{F}}_{j+1/2}^n - \bar{\mathcal{F}}_{j-1/2}^n) \quad (2.8)$$

où:

$$\bar{\mathcal{F}}_{j\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{[t^n, t^{n+1}]} \mathcal{F}(R(x_{j\pm 1/2}, s)) ds \quad (2.9)$$

On note que le schéma utilise ici de l'information non seulement pertinente mais exacte. On peut donc affirmer que le schéma en est un qui solutionne exactement (2.1) pour une condition frontière constante par morceaux, approchant (2.2). On résume le schéma comme étant constitué des deux opérations suivantes:

- (1) projection non oscillatoire qui conserve la masse;
- (2) transport exact d'une condition frontière approchée.

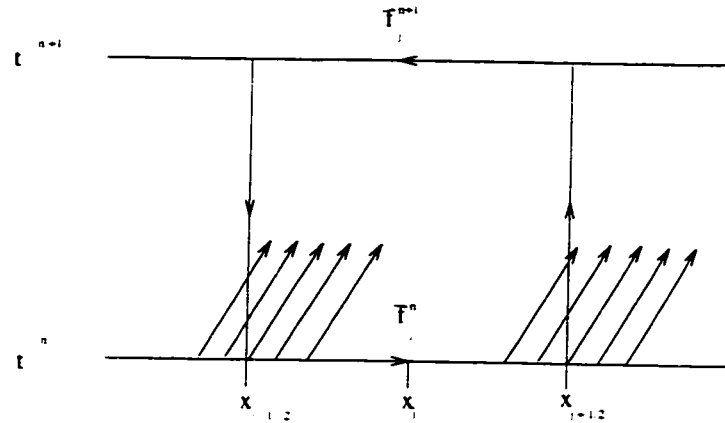


Figure 2.4 Schéma de Godunov dans le cas particulier où $u > 0$.

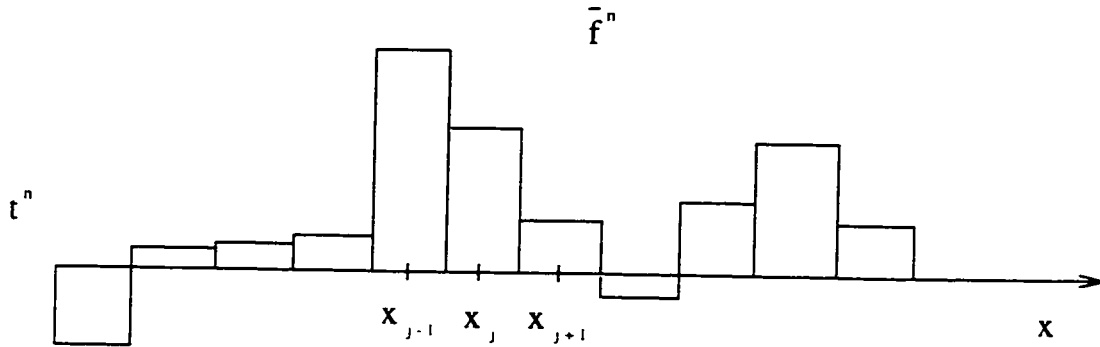


Figure 2.5 (1) Projection sur les constantes par morceaux.

Afin de donner une interprétation graphique du schéma de Godunov on utilisera la version linéaire de (2.1). Dans ce cas, $\mathcal{F}(f(x, t)) = uf(x, t)$ avec u une constante positive et la solution exacte est tout simplement $f(x, t) = f^-(x - ut)$. Dans ce cas, la figure (2.4) montre que $f(x_{j-1/2}, t)$ est constante pour $t^n \leq t \leq t^n + \Delta t$ (si Δt n'est pas trop grand et vérifie la condition CFL: $a\Delta t/\Delta x \leq 1$) et égale à \bar{f}_{j-1}^n . De même $f(x_{j+1/2}, t)$ est aussi constante et égale à \bar{f}_j^n pour $t^n \leq t \leq t^n + \Delta t$. L'équation (2.8) se traduit par:

$$\bar{f}_j^{n+1} = \bar{f}_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n).$$

À la section précédente on a utilisé une condition initiale approchée constante par morceaux. Dans ce qui suit on remplace la projection (2.4) par une projection linéaire pour l'évaluation des intégrales de flux (2.9). Une telle projection peut s'écrire:

$$\tilde{f}(x, t^n) = \bar{f}_j^n + \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right) (x - x_j) \quad \forall x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]. \quad (2.10)$$

où une pente possible $(\partial \tilde{f} / \partial x)$ est donnée par:

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right) = \frac{\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n}{\Delta x}.$$

Cette méthode de projection sur les fonctions linéaires par morceaux est représentée graphiquement à la figure 2.7. Cette projection est en quelque sorte arbitraire mais a l'avantage de conserver la masse (voir (2.5)). Quel est l'ordre de précision de cette projection? De ce choix pour la projection qui est d'ordre deux en espace (voir Harten [32]) et des développements qui suivent, on tire la méthode d'ordre deux en espace et en temps bien connue de Lax-Wendroff.

À l'aide de (2.10), de la figure 2.8 et des paramétrisations naturelles x et t , on évalue l'intégrale de flux de (2.7) en $j - 1/2$ par:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_{j-1/2} &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathcal{F}(f(x_{j-1/2}, t)) dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} u f(x_{j-1/2}, t) dt = \\ \int_{x_{j-1/2}-u\Delta t}^{x_{j-1/2}} f(x, t^n) dx &= u\Delta t \left(\bar{f}_{j-1}^n + \frac{\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n}{\Delta x} (x_{j-1} + \frac{\Delta x}{2} - u\frac{\Delta t}{2} - x_{j-1}) \right). \end{aligned}$$

Le résultat étant obtenu à l'aide de la formule du point milieu (exacte dans ce cas si $u\Delta t \leq \Delta x$) et du fait que le jacobien de la transformation est $u dt = dx$. En remaniant les termes on obtient:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{j-1/2} = u\Delta t \left(\bar{f}_{j-1}^n + \frac{1}{2} \left(1 - u\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n) \right) \quad (2.11)$$

De même on trouve:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{j+1/2} = u\Delta t \left(\bar{f}_j^n + \frac{1}{2} \left(1 - u\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) (\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n) \right) \quad (2.12)$$

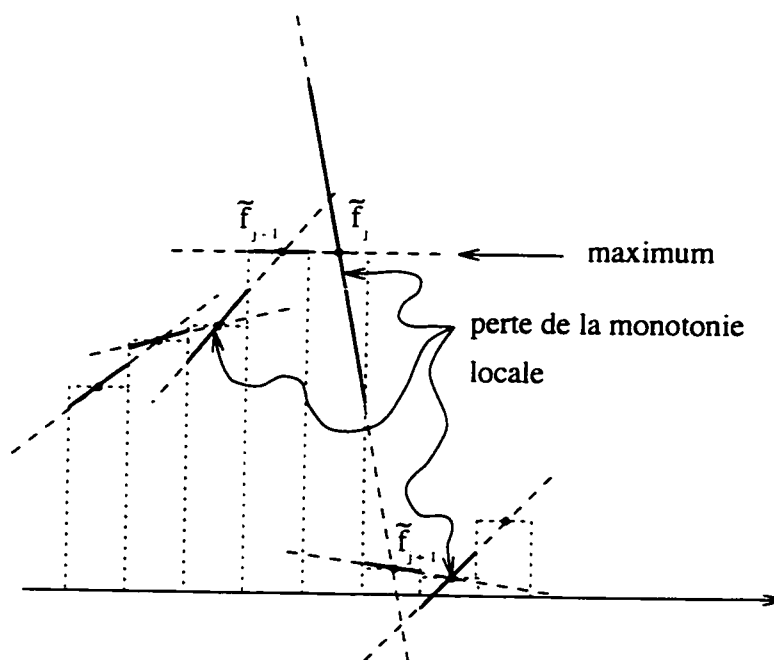


Figure 2.7 *Reconstruction linéaire à partir de la projection constante par morceaux.*

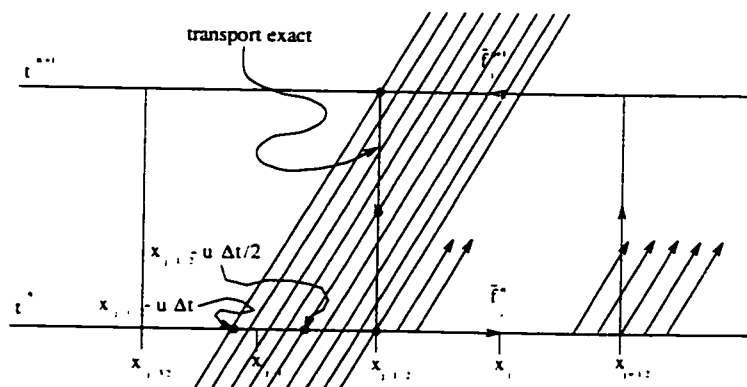


Figure 2.8 *Calcul du flux le long du côté $x_{j-1/2}$.*

En reportant dans (2.8) on trouve le schéma classique d'ordre deux en espace et en temps de Lax-Wendroff [47. 1] sous sa forme upwind [64. 1].

$$\bar{f}_j^{n+1} = \bar{f}_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n) - \frac{1}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\bar{f}_{j+1}^n - 2\bar{f}_j^n + \bar{f}_{j-1}^n) \quad (2.13)$$

où $\Delta x - u\Delta t \geq 0$ lorsque la condition CFL est satisfaite. On interprète donc cette forme du schéma de Lax-Wendroff comme étant une approximation d'ordre un en espace et en temps à laquelle on a ajouté un terme d'antidiffusion numérique $(u\Delta t/2)(\Delta x - u\Delta t)\partial^2 f/\partial x^2$. On tire la conclusion que ce terme d'antidiffusion est le générateur des instabilités du schéma de Lax-Wendroff puisqu'il est bien connu que la différence divisée upwind est diffusive. On souhaite donc contrôler d'une façon ou d'une autre l'intensité de ce terme d'antidiffusion, jusqu'à le rendre possiblement nul aux endroits d'instabilités tout en conservant une précision du second ordre (antidiffusif) ailleurs. On aura alors construit un schéma alternant entre une forme diffusive et antidiffusive (alternant entre l'ordre un et l'ordre deux).

Afin de construire un tel schéma, on introduit maintenant la notion de limiteurs. Soit φ une fonction (dont on ne donne pas les variables dépendantes afin d'avoir un maximum de flexibilité) qu'on placera devant le terme d'antidiffusion pour obtenir:

$$\bar{f}_j^{n+1} = \bar{f}_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n) - \frac{\varphi}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\bar{f}_{j+1}^n - 2\bar{f}_j^n + \bar{f}_{j-1}^n)$$

φ doit être positive ou nulle puisque pour le problème négatif on rajouterait de la diffusion à la différence amont ce qui est peu souhaitable. Cette technique est complexe dans le cas général, les choix possibles pour la fonction φ et ses variables dépendantes n'étant pas directement accessibles dans le cas général. Il existe une façon simple de déterminer une fonction particulière φ et ses variables dépendantes. Cependant, l'analogie utilisée dans ce cas suggère une redéfinition plus générale de

φ et cette nouvelle définition permet de construire les schémas TVD. En effet, si on réorganise les termes de (2.13), on obtient facilement:

$$\begin{aligned}\bar{f}_j^{n+1} = & \bar{f}_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\bar{f}_j^n + \frac{\varepsilon}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n) \right) \right. \\ & \left. - \left(\bar{f}_{j-1}^n - \frac{\varepsilon}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n) \right) \right]\end{aligned}$$

ce qui nous permet de redéfinir les intégrales des flux (2.11) et (2.12) comme étant:

$$\hat{\mathcal{F}}_{j-1/2} = u \Delta t \left(\bar{f}_{j-1}^n + \frac{\varepsilon}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n) \right)$$

et

$$\hat{\mathcal{F}}_{j+1/2} = u \Delta t \left(\bar{f}_j^n - \frac{\varepsilon}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n) \right)$$

En comparant ces définitions avec (2.11) et (2.12), on remarque que l'on a tout simplement modifié les pentes des projections (2.10) (qui étaient arbitraires de toute façon) et ces dernières s'écrivent:

$$f(x, t^n) = \bar{f}_j^n + \varphi(\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n)(x - x_{j-1}) \quad \forall x \in [x_{j-3/2}, x_{j-1/2}]$$

et

$$f(x, t^n) = \bar{f}_j^n + \varphi(\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n)(x - x_j) \quad \forall x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$$

Ici φ est identique sur deux intervalles adjacents ce qui entraîne que φ est constante sur tout le domaine en x pour un t^n donné. Cette méthode est donc peu flexible puisqu'il faut limiter l'antidiffusion partout, ce qui risque d'introduire trop de diffusion. L'analyse d'un tel procédé, qu'on appellera limiteur d'antidiffusion, a sûrement un intérêt mais s'éloigne sensiblement des propos qui nous intéressent, notamment les schémas TVD. On fait l'importante remarque qu'en éléments finis, l'argument de base conduisant à la méthode SUPG est identique à ce qui vient d'être décrit. Ce qui conduit bien sûr à une méthode tout aussi rigide.

En différences finies on assouplit l'idée de base par le raisonnement suivant. L'interprétation ci-haut du limiteur d'antidiffusion comme étant en fait un limiteur de pentes nous offre la possibilité de choisir un limiteur de pente différent d'un intervalle à l'autre (c'est l'approche utilisée en différences finies). On a finalement:

$$\hat{f}(x, t^n) = \bar{f}_j^n + \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \right) (x - x_j) \quad \forall x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$$

où:

$$\left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \right) = \varphi_j^n \frac{(\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n)}{\Delta x}$$

et on parlera alors de limiteur de pentes (de flux). Si φ_j^n satisfait certaines propriétés (voir [64]), alors on a le schéma TVD suivant:

$$\bar{f}_j^{n+1} = \bar{f}_j^n - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n) - \frac{1}{2} (1 - u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (u \frac{\Delta t}{\Delta x}) (\varphi_j^n (\bar{f}_{j+1}^n - \bar{f}_j^n) - \varphi_{j-1}^n (\bar{f}_j^n - \bar{f}_{j-1}^n))$$

Pour bien saisir ce processus de limitation de pentes on décrit graphiquement les étapes de résolution du schéma de Lax-Wendroff 2.13. Il s'agit encore une fois des deux mêmes propriétés:

- (1) projection qui conserve la masse;
- (2) transport exact d'une condition frontière approchée.

Si à l'étape (1) il était possible de choisir les pentes de telle sorte que les propriétés générales de la condition initiale soient conservées (la construction des projections conserve la masse et on espère par exemple conserver la monotonie, voir Harten [32] et Van Leer [71]) alors on aurait obtenu un schéma stable. En se remémorant les propriétés (2.5), (2.6) et les figures 2.9, 2.10 et 2.11, on conclut que la

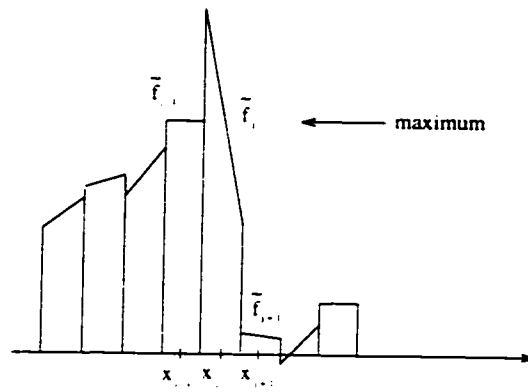


Figure 2.9 *Condition limite approchée linéaire.*

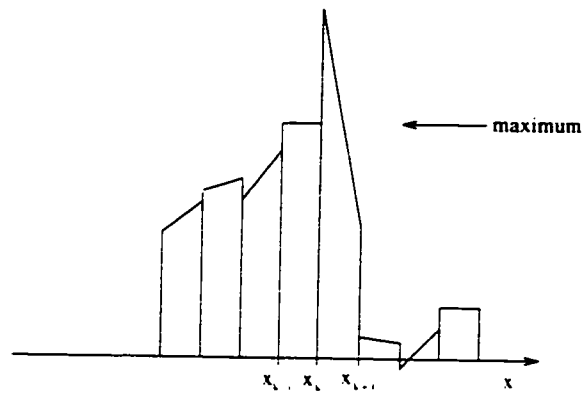


Figure 2.10 *Transport exact.*

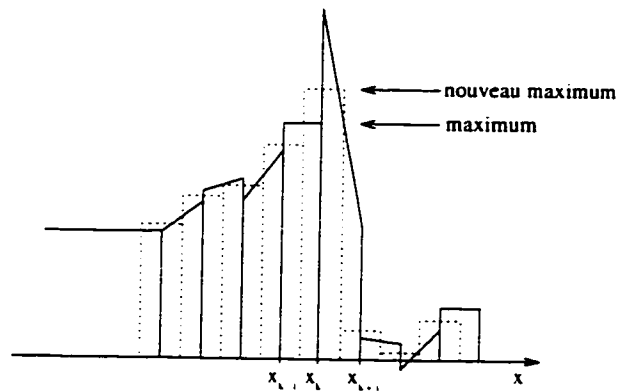


Figure 2.11 *Projection sur les constantes par morceaux (pointillés).*

notion de schémas TVD prend alors la forme:

- (1) projection non oscillatoire (pas de nouveaux minima ou maxima) qui conserve la masse et la monotonie;
- (2) transport exact d'une condition frontière approchée.

C'est la propriété (2.6) qui est prise en défaut en plus d'une perte de monotonie (voir figure 2.7). Sweby [64] résume dans un cadre plus général et sous un autre angle les conditions nécessaires pour que les limiteurs de pentes transforment le schéma de Lax-Wendroff en un schéma TVD. On peut aussi consulter [32] pour un traitement plus près du nôtre dans le cadre de la construction de schémas ENO.

Par souci de complétude, on présente un limiteur très populaire ainsi que la modification obtenue sur la projection (la conservation de la monotonie ne crée pas de nouveaux extréma, voir figure 2.12). Pour une revue complète on se référera à [64] et à la bibliographie incluse.

$$\varphi_j^n(f_{j-1}^n, f_j^n, f_{j+1}^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{f_{j+1}^n - f_j^n} \geq 1 \\ \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{f_{j+1}^n - f_j^n} & \text{si } 0 < \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{f_{j+1}^n - f_j^n} < 1 \\ 0 & \text{si } (f_j^n - f_{j-1}^n)(f_{j+1}^n - f_j^n) \leq 0 \end{cases}$$

Une interprétation grossière de l'effet de ce limiteur est obtenue en observant la figure 2.13 (c'est notre interprétation première de limiteur d'antidiffusion). Dans ce cas, les méthodes à limiteurs de flux passent *localement* d'une méthode d'ordre un en espace et en temps (là où l'on rencontre un fort gradient, en x_{j-1} et x_j , $\varphi = 0$ ce

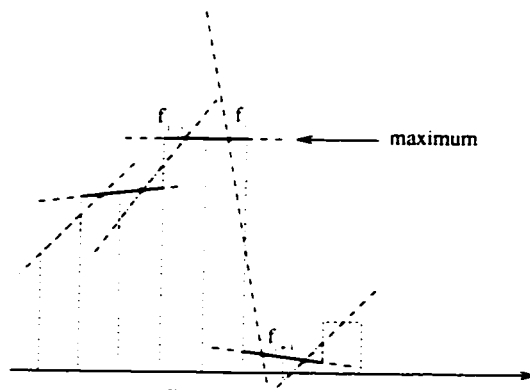


Figure 2.12 *Limiteur de pentes de Roe (conserve la monotonie et ne crée pas de nouveaux extrêmes).*

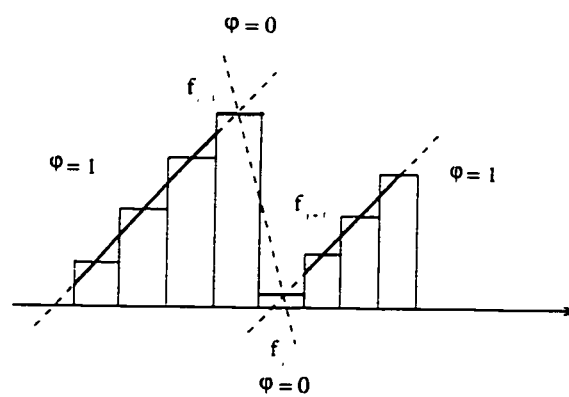


Figure 2.13 *Un cas limite pour le limiteur de pentes de Roe.*

qui entraîne une différence finie amont) à une méthode d'ordre deux en espace et en temps (Lax-Wendroff partout ailleurs). Le cas général étant une subtile pondération entre ces deux schémas limites.

CHAPITRE 3

“Upwinding” en éléments finis.

Ce chapitre rappelle les principales méthodes d'éléments finis qui sont basées sur la notion d'upwinding. En premier lieu mentionnons que la méthode de Galerkin a fait ses preuves pour la résolution de problèmes elliptiques ou paraboliques et que les solutions obtenues par cette méthode possèdent d'excellentes propriétés (voir entre autres [40, 11, 59]). En ce qui concerne les problèmes hyperboliques, la méthode de Galerkin fournit des solutions inutilisables lorsque la solution possède de forts gradients. Dans ce cas, de fortes oscillations, générées près des régions à fort gradient, envahissent presque tout le domaine de calcul. Ce défaut est très ennuyeux puisque les solutions de (2.1) possèdent souvent des zones à fort gradients pouvant même former des discontinuités (voir Lax [47]).

Dans un premier temps on se concentrera sur le cas unidimensionnel et dans un second temps on développera les différentes généralisations au cas de dimension supérieure. Comme en différences finies cette généralisation ne se fait pas automatiquement. Pour donner le ton à notre discussion on considère le problème simplifié suivant:

$$\begin{cases} -\epsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + u \frac{df}{dx} = 1 & \text{dans } (0, L) \\ f(0) = f(L) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

On se limite au cas stationnaire en invoquant le même argument qu'à la section précédente. En effet, comment peut-on espérer obtenir une solution du problème

instationnaire si la solution du problème stationnaire est inacceptable. De plus l'application de la méthode des éléments finis est plus facile à suivre puisque les intégrales qui interviennent sont obtenues directement. Étudions donc brièvement (3.1), sa forme adimensionnelle étant:

$$\begin{cases} -\frac{\epsilon}{uL} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = \frac{L}{u} & \text{dans } (0, 1) \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

La solution analytique (voir figure 3.1) est donnée par:

$$f_{\gamma}^{\pm}(x) = \left(\frac{L}{u}\right) \left[x - \frac{e^{x/\gamma} - 1}{e^{1/\gamma} - 1} \right] \quad \forall x \in [0, 1]$$

où $\gamma = \epsilon/uL$ et le signe \pm est choisi en fonction du signe de u . Lorsque $\gamma \rightarrow 0$ avec $u < 0$:

$$f_{\gamma}^{-}(x) \rightarrow f_0^{-}(x) = \begin{cases} \left(\frac{L}{u}\right)(x-1) & \forall x \in (0, 1] \\ 0 & \text{en } x = 0 \end{cases}$$

et si $u > 0$ on a:

$$f_{\gamma}^{+}(x) \rightarrow f_0^{+}(x) = \begin{cases} \left(\frac{L}{u}\right)(x) & \forall x \in [0, 1) \\ 0 & \text{en } x = 1 \end{cases}$$

Par ailleurs, la solution de (3.2) pour $\gamma = 0$ et $u < 0$ et la condition frontière $f(1) = 0$ est:

$$f^{-}(x) = \left(\frac{L}{u}\right)(x-1)$$

et lorsque $u > 0$ avec la condition frontière $f(0) = 0$ on a:

$$f^{+}(x) = \left(\frac{L}{u}\right)(x)$$

Les graphiques de ces solutions sont aussi donnés à la figure 3.1. Si on utilise la méthode de Galerkin classique avec des éléments linéaires par morceaux (continus)

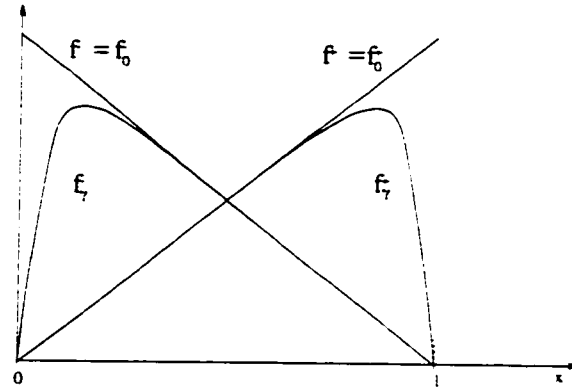


Figure 3.1 Solution de (3.2) avec $\epsilon \neq 0$ et $\epsilon = 0$ ($u > 0$ et $u < 0$).

de longueur fixe h , il est dans ce cas facile de vérifier que la discrétisation de (3.2) s'écrit:

$$-\frac{\epsilon}{uLh^2}(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{1}{2h}(f_{j+1} - f_{j-1}) = \frac{L}{u} \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (3.3)$$

avec $f_j = f_h(jh)$, $j = 0, \dots, N$ et $f_0 = f_N = 0$. On démontre qu'une des valeurs propres de cette matrice est $4\epsilon/(hu)$ et cette dernière tend vers 0 lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. On prévoit donc que ce système devient instable lorsque ϵ devient très petit. Pour $u > 0$, on montre dans Zienkiewicz [77] que la solution de ce système est donnée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_j = A + B \left[\frac{1 + \frac{h}{2\gamma}}{1 - \frac{h}{2\gamma}} \right]^j \quad j = 1, \dots, N-1 \quad \text{si } \epsilon \neq \frac{uhL}{2} \\ f_j = j \left(\frac{hL}{u} \right) \quad j = 1, \dots, N-1 \quad \text{si } \epsilon = \frac{uhL}{2} \\ f_N = 0 \end{array} \right.$$

où A et B sont des constantes. Si $\epsilon = uhL/2$ alors on obtient la solution critique donnée par la figure 3.2. On voit que si $\epsilon > uhL/2 = \epsilon h/(2\gamma)$, cette solution n'oscille

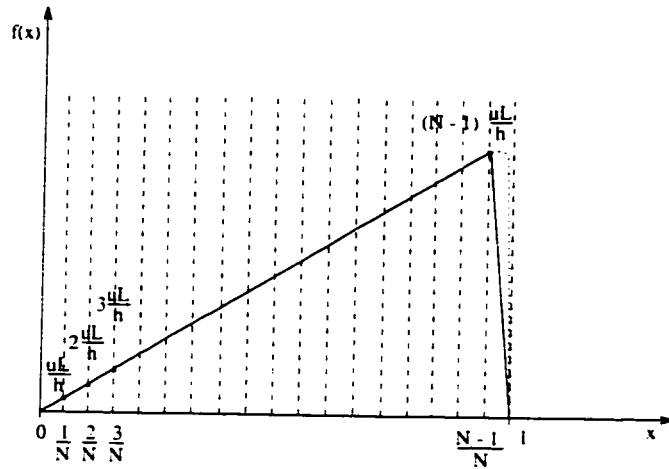


Figure 3.2 Solution analytique et numérique dans le cas où $\epsilon = uhL/2$.

pas. Cependant si $\epsilon < uhL/2$, la solution additionne et soustrait alternativement une quantité (multipliée par B) à la constante A , ce qui entraîne des oscillations de part et d'autre de la solution critique (figure 3.2).

Une autre façon de voir cette instabilité, qui est tirée des arguments mentionnés dans le chapitre précédent, est d'écrire (3.3) sous une forme qui fait apparaître la différence finie upwind pour approcher la dérivée première dans (3.2):

$$\left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2}\right)(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{1}{h}(f_j - f_{j-1}) = \frac{L}{u} \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

Le terme $\left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2}\right)$ correspond à une diffusion si $\epsilon > huL/2$ et à une antidiffusion si $\epsilon < huL/2$. Comme en différences finies, on identifie ce terme comme étant la source des instabilités. Pour les éliminer on peut s'assurer que le coefficient de la différence finie représentant la dérivée seconde dans (3.4) soit toujours diffusif (négatif). Pour ce faire on ajoute au terme $\left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2}\right)$ la quantité négative $-\delta/h^2$ ($\delta > 0$) de telle sorte que $-\frac{\delta}{h^2} + \left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2}\right) < 0$ ou encore $\delta > \frac{h}{2} - \frac{\epsilon}{uL}$. Dans ce cas (3.4) s'écrit:

$$\left(-\frac{\delta}{h^2} + \frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2}\right)(f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1}) + \frac{1}{h}(f_j - f_{j-1}) = \frac{L}{u} \quad (3.5)$$

$$j = 1, \dots, N-1.$$

En multipliant par h et en remaniant les termes, ce schéma s'écrit:

$$-\frac{\epsilon}{uLh}(f_{j+1} - f_j) + \frac{\epsilon}{uLh}(f_j - f_{j-1}) - \frac{\delta}{h}(f_{j+1} - f_j) + \frac{\delta}{h}(f_j - f_{j-1}) \\ + \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_j) + \frac{1}{2}(f_j - f_{j-1}) = \frac{Lh}{u} \quad j = 1, \dots, N-1$$

qui est la matrice associée au problème variationnel avec fonctions tests modifiées suivant:

$$\int \frac{\epsilon}{uL} \frac{df}{dx} \frac{dg}{dx} dx + \int \frac{df}{dx} \left(g + \delta \frac{dg}{dx} \right) dx = \int \frac{L}{u} g dx$$

C'est la méthode classique de diffusion artificielle. En dimension supérieure ce terme de diffusion est trop actif perpendiculairement à l'écoulement et alors on modifie δ afin que la diffusion n'agisse que suivant les caractéristiques: c'est la méthode dite "streamline upwind" ou tout simplement SU. Cependant, cette méthode SU répond à un problème modifié (voir [40, 53]). Par contre, si on utilise la nouvelle fonction test dans toutes les intégrales, on ne modifie pas le problème initial (voir [53]) et ce changement conserve le caractère de diffusion le long des lignes de courant. C'est une formulation dite de Petrov-Galerkin. Cette dernière modification constitue la méthode dite "streamline upwind Petrov Galerkin" ou SUPG qui est donnée par:

$$\int \frac{\epsilon}{uL} \frac{df}{dx} \left(g + \delta \frac{dg}{dx} \right) dx + \int \frac{df}{dx} \left(g + \delta \frac{dg}{dx} \right) dx = \int \frac{L}{u} \left(g + \delta \frac{dg}{dx} \right) dx$$

On peut déjà critiquer de telles méthodes en observant que premièrement, la diffusion ajoutée est constante et ne s'ajuste pas en fonction de la raideur de la pente. Deuxièmement, l'attribution d'un caractère upwind est très floue. En effet, dans le cas unidimensionnel l'ajout de viscosité artificielle donne l'effet de l'upwinding mais l'analyse du chapitre précédent sur les schémas TVD est plus près de ce qu'on appellera de l'upwinding dans cette thèse. De plus, la généralisation en dimension supérieure se raccorde difficilement avec l'idée d'upwinding. Ce qu'on entend par upwinding est représenté par le schéma qui suit, de type TVD. Si on prend la définition

suivante pour δ :

$$\delta = h^2 \left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2} \right) - \varphi h^2 \left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2} \right)$$

alors en distribuant φ comme en différences finies on récupère du schéma de diffusion artificielle classique (3.5) une méthode TVD (du moins quand $\epsilon = 0$) en éléments finis qui s'écrit:

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon}{uL} \left[\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{df}{dx} \left(\varphi_{j-1} \frac{dg_1}{dx} \right) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{df}{dx} \left(\varphi_j \frac{dg_2}{dx} \right) dx \right] \\ & + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{df}{dx} \left(2g_1 - \frac{h}{2} \varphi_{j-1} \frac{dg_1}{dx} \right) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{df}{dx} \left(-\frac{h}{2} \varphi_j \frac{dg_2}{dx} \right) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \frac{L}{u} g dx \end{aligned}$$

où $g_1 = g|_{[x_{j-1}, x_j]}$ et $g_2 = g|_{[x_j, x_{j+1}]}$. Ceci est obtenu par analogie avec les schémas TVD du chapitre précédent puisque lorsqu'on utilise des fonctions de base linéaires on trouve le schéma suivant:

$$\left(\frac{1}{2h} - \frac{\epsilon}{uLh^2} \right) (\varphi_j (f_{j+1} - f_j) - \varphi_{j-1} (f_j - f_{j-1})) + \frac{1}{h} (f_j - f_{j-1}) = \frac{L}{u} \quad j = 1, \dots, N-1$$

Dans le cas présent (stationnaire), ce schéma est non linéaire tout comme la version différences finies.

Cette démarche a pour but de montrer que les idées qui semblaient être réservées aux différences finies sont transposables aux éléments finis, du moins dans le cas unidimensionnel. On remarque que même en différences finies les concepts d'upwinding et de schémas TVD (TVB, ENO) ne sont pas facilement généralisables en dimension supérieure. Plusieurs types de méthodes qui incorporent les bonnes propriétés des schémas unidimensionnels ont vu le jour, comme dans les références [7, 51, 58] pour la méthode des volumes finis, et dans [2] pour la méthode de Baba-Tabata. Le passage en dimension supérieure pose aussi un problème en éléments finis, mais on a déjà dressé la liste de ce qui est recherché pour obtenir une méthode stable. Notre but est d'intégrer un maximum de ces propriétés dans des

schémas d'éléments finis. La section suivante montre que pour les méthodes d'éléments finis classiques on ne peut même pas assurer la convergence vers la solution analytique dans le cas où celle-ci possède des discontinuités.

3.1 Stabilité des méthodes d'élément finis.

Dans cette section on se limitera à présenter des estimations d'erreur pour la méthode de Galerkin classique et la méthode SUPG dans la résolution du problème suivant:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \nabla f + f = s & \text{dans } \Omega \\ f = f^- & \text{sur } \partial\Omega^- \end{cases} \quad (3.6)$$

dont la forme variationnelle est directement:

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in V \text{ avec } f = f^- \text{ sur } \partial\Omega^- \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla f g d\vec{x} + \int_{\Omega} f g d\vec{x} = \int_{\Omega} s g d\vec{x} \quad \forall g_h \in V \quad \text{avec } g = 0 \text{ sur } \partial\Omega^- \end{cases} \quad (3.7)$$

où \vec{u} est un champ de vecteurs et s un terme source. La forme discrète de la méthode de Galerkin classique s'écrit:

$$\begin{cases} \text{Trouver } f_h \in V_h \text{ avec } f_h = f^- \text{ sur } \partial\Omega^- \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla f_h g_h d\vec{x} + \int_{\Omega} f_h g_h d\vec{x} = \int_{\Omega} s g_h d\vec{x} \quad \forall g_h \in V_h \quad \text{avec } g_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega^- \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour cette méthode on a le théorème suivant concernant l'erreur.

Théorème 1: Il existe une constante C telle que si $\vec{u} \in L^\infty(\Omega)$, f est solution de (3.7) et f_h est solution (3.8) alors:

$$\|f - f_h\|_{0,\Omega} + \|f - f_h\|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \leq C h^r \|f\|_{r+1,\Omega}$$

où:

$$\|g\|_{0,\Omega} = \left\{ \int_{\Omega} g^2 d\vec{x} \right\}^{1/2}$$

et:

$$|g|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} = \left\{ \int_{\partial\Omega^+} g^2(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right\}^{1/2}$$

La preuve qui suit est basée sur celle donnée dans Johnson [40] pour la méthode SUPG.

Preuve: Par intégration par parties de 3.8 et en supposant $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ et $g = 0$ sur $\partial\Omega^-$ on a que:

$$\int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla g) g d\vec{x} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega^+} g^2(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

Alors pour l'interpolée \tilde{f}_h on a:

$$\begin{aligned} & \|f_h - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} |f_h - \tilde{f}_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)}^2 = \\ & \int_{\Omega} [\vec{u} \cdot \nabla (f_h - \tilde{f}_h) + (f_h - \tilde{f}_h)] (f_h - \tilde{f}_h) d\vec{x} = \\ & \int_{\Omega} [\vec{u} \cdot \nabla (f - f_h + f_h - \tilde{f}_h) + (f - f_h + f_h - \tilde{f}_h)] (f_h - \tilde{f}_h) d\vec{x} \\ & \quad - \int_{\Omega} [\vec{u} \cdot \nabla (f - f_h) + (f - f_h)] (f_h - \tilde{f}_h) d\vec{x} \\ & = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \nabla (f - \tilde{f}_h) (f_h - \tilde{f}_h) d\vec{x} + \int_{\Omega} (f - \tilde{f}_h) (f_h - \tilde{f}_h) d\vec{x} \\ & \leq \|\vec{u} \cdot \nabla (f - \tilde{f}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \|f - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|f_h - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega}^2 \end{aligned}$$

où on a utilisé deux fois l'inégalité $ab \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2$, avec $\epsilon = 2$, ce qui entraîne que:

$$\frac{1}{2} \left(\|f_h - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + |f_h - \tilde{f}_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)}^2 \right) \leq \|\vec{u} \cdot \nabla (f - \tilde{f}_h)\|_{0,\Omega}^2 + \|f - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega}^2 \quad (3.9)$$

On rappelle les résultats classiques de l'interpolation dans les espaces de Sobolev (voir [11, 59]) qui sont:

$$\|f - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega} \leq C h^{r+1} \|f\|_{r+1,\Omega} \quad (3.10)$$

$$\|f - \tilde{f}_h\|_{1,\Omega} \leq C h^r \|f\|_{r+1,\Omega} \quad (3.11)$$

$$|f - \tilde{f}_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1,\Omega} \quad (3.12)$$

où on a défini la norme:

$$|g|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} = \int_{\partial\Omega} g^2 |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds$$

On majore le terme $\|\vec{u} \cdot \nabla(f - \tilde{f}_h)\|_{0,\Omega}^2$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} \cdot \nabla(f - \tilde{f}_h)\|_{0,\Omega}^2 &\leq C \sum_{i=1}^n \|u_i \frac{\partial(f - \tilde{f}_h)}{\partial x_i}\|_{0,\Omega}^2 \\ &\leq C \sup_{i=1, \dots, n} \left\{ \sup_{\text{ess}} (u_i)^2 \right\} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial(f - \tilde{f}_h)}{\partial x_i} \right\|_{0,\Omega}^2 \right) \leq C \|f - \tilde{f}_h\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

De plus, puisque:

$$\frac{1}{4}(a+b)^2 \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

on a:

$$\frac{1}{4} \left(\|f_h - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega} + |f_h - \tilde{f}_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \left(\|f_h - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega}^2 + |f_h - \tilde{f}_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)}^2 \right)$$

et en reportant dans (3.9) on trouve:

$$\frac{1}{4} \left(\|f_h - \tilde{f}_h\|_{0,\Omega} + |f_h - \tilde{f}_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right)^2 \leq (Ch^r \|f\|_{r+1,\Omega})^2$$

et en utilisant l'inégalité du triangle et les inégalités 3.10 et 3.12, on a le résultat.

Ce théorème entraîne que:

$$\|f - f_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^r \|f\|_{r+1,\Omega}$$

$$|f - f_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega^+; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \leq Ch^r \|f\|_{r+1,\Omega}$$

Cela nous donne une estimation de l'erreur commise dans le domaine Ω et sur la frontière sortante $\partial\Omega^+$. Le contrôle sur la partie entrante du domaine sera lié à la technique utilisée pour représenter f^- sur $\partial\Omega^-$ (condition forte discrétisée sur $\partial\Omega^-$).

Les estimations d'erreur pour la méthode de Galerkin sont loin d'être satisfaisantes. De plus, on connaît bien les problèmes qu'éprouve cette méthode. On s'est

donc intéressé aux estimations d'erreur pour la méthode SUPG. On retrouve des analyses relativement récentes de cette méthode dans [42]. On y démontre le théorème suivant:

Théorème 2: Il existe une constante C telle que si f est solution du problème continu et f_h solution discrète pour la formulation SUPG, alors:

$$\left(\|f - f_h\|_{0,\Omega}^2 + h \|\vec{u} \cdot \nabla(f - f_h)\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1+h}{2} |f - f_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)}^2 \right)^{1/2} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1,\Omega}$$

ce qui entraîne que:

$$\|f - f_h\|_{0,\Omega} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1,\Omega}$$

$$\|\vec{u} \cdot \nabla(f - f_h)\|_{0,\Omega} \leq C h^r \|f\|_{r+1,\Omega}$$

$$|f - f_h|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \leq C \frac{h^{r+1/2}}{1+h} \|f\|_{r+1,\Omega} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1,\Omega}$$

Ces estimations d'erreurs gagnent sur deux volets par rapport à celles obtenues pour la méthode de Galerkin classique. Premièrement, on a une estimation sur la dérivée directionnelle $\vec{u} \cdot \nabla(f - f_h)$ qui n'est pas disponible pour la méthode de Galerkin. Deuxièmement, l'estimation de $f - f_h$ est quasi-optimale en ce sens qu'il manque seulement un demi ordre pour obtenir les estimés (3.10), (3.12) alors que les estimés de la méthode de Galerkin sont à un ordre d'être optimal.

On conclut que plus on augmente le degré des polymômes pour cerner les irrégularités de la solution f , plus f doit être régulière car la norme $\|f\|_{\mathcal{H}^{r+1}(\Omega)}$ ne cesse d'augmenter. On peut aussi dire que plus f est irrégulière plus r doit être petit: on ne peut alors augmenter l'ordre de précision de la solution numérique

que par le biais du maillage adaptatif. Il est bien connu que l'approximation à l'aide de polynômes devient oscillatoire pour une fonction irrégulière. À ce niveau les estimations d'erreurs ne nous apprennent rien de nouveau à part le fait que la méthode d'éléments finis pour les équations dominées par le terme de convection devient un problème d'interpolation pur. De plus, on trouve le paradoxe suivant: les estimations d'erreurs font toutes intervenir la norme $\|f\|_{H^{r+1}(\Omega)}$ et elles sont donc inutiles lorsque f est discontinue ($\|f\|_{H^{r+1}(\Omega)} = \infty$) et cela même pour $r = 0$. Finalement, ces estimations d'erreurs ne permettent pas à elles seules de conclure sur l'efficacité de la méthode SUPG par rapport à la méthode de Galerkin classique. Des explications de cette amélioration invoquant le caractère upwind de la méthode SUPG (qui à notre sens n'en est pas vraiment une), sont offertes dans [40] où le lecteur intéressé peut se rapporter.

CHAPITRE 4

Étude de la méthode de Galerkin discontinue

La conclusion des chapitres précédents nous incite à réfléchir à la régularité de la solution du problème de convection et à comment cette régularité dépend de la condition frontière. Comment peut-on s'assurer, pour une forme faible du problème de convection donné, que sa version discrète conserve un maximum de *propriétés physiques*? La méthode de Lesaint-Raviart (Galerkin discontinue) est la forme faible de base utilisée dans ce chapitre. On croit que cette méthode est plus flexible que toutes les autres formes faibles possibles pour ce type de problèmes et cela est soutenu par le fait qu'en différences finies, les méthodes qu'on sait performantes sont basées sur des interpolations discontinues. De plus, cette méthode possède des analyses d'erreur identiques à celles obtenues pour la méthode SUPG (voir [40, 42]). On poursuit 3 buts dans ce chapitre. Premièrement on veut définir la méthode de Lesaint-Raviart dans un espace de dimension infinie possédant un minimum de régularité. On construit un espace suffisamment régulier pour pouvoir y définir des formes linéaires, bilinéaires, des traces et effectuer des opérations sur ces entités. Ceci permettra d'établir l'existence et l'unicité de la version *continue*. Deuxièmement, on conclut sur les conditions initiales admissibles pour que le problème *continu* soit bien posé et cela soulève des interrogations sur les conditions frontières admissibles pour la version discrète. Finalement, l'approche utilisée dans la première partie de ce chapitre est basée sur une nouvelle façon d'aborder le problème de convection pure. Une fois discrétisée, cette nouvelle modélisation fournit une méthode mixte qui possède un avantage majeur par rapport aux autres méthodes connues. Les

arguments de base utilisés dans la première section reposent essentiellement sur la théorie développée dans le chapitre 2 du livre de F. Brezzi et M. Fortin [5].

4.1 Le problème de convection en dimension infinie

Soit Ω un domaine et $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{\Omega_i | \Omega = \bigcup_i^n \Omega_i\}$ une partition du Ω en sous-domaines Ω_i . Supposons que l'on ait un champ de vecteurs "assez régulier". $\vec{u} \in (\mathcal{H}^2(\Omega_i))^2$, par exemple \vec{u} solution des équations de Navier-Stokes ($\text{div}(\vec{u}) = 0$) et sans zone de recirculation. On cherche alors à savoir dans quelles conditions on peut trouver une solution de:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \nabla f = 0 & \text{dans } \Omega \\ f = f^- & \text{sur } \partial\Omega^- \end{cases} \quad (4.1)$$

D'un point de vue plus général on cherche à résoudre:

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ telle que:} \\ \langle \vec{u} \cdot \nabla f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)} = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ f = f^- \quad \text{sur } \partial\Omega^- \end{cases} \quad (4.2)$$

où $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions infiniment dérivables à support compact, muni de la topologie habituelle. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}$ le crochet de dualité. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est ce qu'on appelle l'espace des distributions (voir par exemple [44]).

Il est clair que l'existence d'une solution f régulière est subordonnée à la régularité de f^- . On se restreint donc à la recherche de solutions \tilde{f} régulières, c'est-à-dire dans un espace "assez général" $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_1^n \mathcal{H}^1(\Omega_i)$, ce qui est isomorphe à $\mathcal{G} \equiv \{g \in L^2(\Omega) \mid g|_{\Omega_i} \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \forall \Omega_i \in \mathcal{P}\}$. On va montrer que la restriction à ce type de solutions entraîne une condition de compatibilité pour f^- . En observant (4.2), on peut déjà dire que cette condition de compatibilité ne sera que l'affirmation du fait que la condition frontière f^- doit appartenir à la restriction à $\partial\Omega^-$ de l'espace:

$$\{g \in \mathcal{G} \mid \vec{u} \cdot \nabla g = 0\}$$

pour que le problème (4.2) ait un sens. Cette aspect découle directement de la preuve d'existence et d'unicité d'une solution et sera traité plus en détails à la fin de cette section.

La restriction à ce type d'espaces nous permet d'utiliser les arguments d'injection et de continuité classiques ($\mathcal{G} \subset L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$) pour remplacer le problème (4.2) par des intégrales définies dans $\prod_1^n \mathcal{H}^1(\Omega_i)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} = 0 \quad \forall g \in \mathcal{G} \\ \text{avec } f = f^- \quad \text{sur } \partial\Omega^- \end{array} \right.$$

Puisque f et g sont dans $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$ et \vec{u} dans $(\mathcal{H}^2(\Omega_i))^2$, l'intégration par parties est bien définie (voir Brezzi-Fortin [5]) et comme $\text{div} \vec{u} = 0$, on a:

$$\int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} = - \int_{\Omega_i} f \nabla \cdot (\vec{u} g) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_i} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall f, g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$$

On obtient donc le problème équivalent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i^n \left\{ - \int_{\Omega_i} f \nabla \cdot (g \vec{u}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_i} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right\} = 0 \quad \forall g \in \mathcal{G} \\ \text{avec } f = f^- \end{array} \right. \quad \text{sur } \partial\Omega^- \quad (4.3)$$

En utilisant la continuité de f le long des caractéristiques (par définition de (4.1)) on définit:

$$f_i^-(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} f(\vec{x} - \epsilon \vec{u}) & \forall \vec{x} \in \partial\Omega_i^- \text{ si } \partial\Omega_i^- \cap \partial\Omega^- \equiv \emptyset \\ f^-(\vec{x}) & \forall \vec{x} \in \partial\Omega_i^- \text{ si } \partial\Omega_i^- \cap \partial\Omega^- \neq \emptyset \end{array} \right.$$

et puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega_i \setminus (\partial\Omega_i^- \cup \partial\Omega_i^+)$, (4.3) devient:

$$\sum_i^n \left\{ - \int_{\Omega_i} f \nabla \cdot (g \vec{u}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_i^+} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds + \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right\} = 0 \quad (4.4)$$

En intégrant par parties de nouveau, on trouve:

$$\sum_i^n \left\{ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} (f - f_i^-) g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right\} = 0 \quad (4.5)$$

Cette forme n'est rien d'autre que la définition de $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$ dans Ω au sens des distributions additionnée d'une forme bilinéaire définie sur $\partial\Omega^-$. En effet, l'équation (4.5) peut aussi s'écrire:

$$\langle \vec{u} \cdot \nabla f, g \rangle_{\mathcal{G}' \times \mathcal{G}} + (f, g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} = (f^- \cdot g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \quad (4.6)$$

où:

$$(f, g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} = \int_{\partial\Omega^-} f g |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds$$

On remarque maintenant que la condition $f = f^-$ sur $\partial\Omega^-$ est prise en compte faiblement. Puisque (4.5) est vrai $\forall g \in \mathcal{G}$, on peut utiliser des fonctions g de la forme:

$$g = \left\{ \begin{array}{ll} g_i \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) & \text{dans } \Omega_i \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_i \end{array} \right.$$

pour chaque Ω_i de \mathcal{P} . Un simple raisonnement nous suggère que ce problème est équivalent à trouver une solution sur chaque Ω_i dans la mesure où f_i^- peut être calculée sur chaque $\partial\Omega_i^-$. En fait, on retombe sur une "version continue" de la méthode de Lesaint-Raviart [49], qui ont montré que si le champ de vecteurs \vec{u} est assez régulier, une résolution par sous-domaine est possible. Donc, si on montre l'existence et l'unicité de la solution dans chaque Ω_i on aura trouvé une solution unique dans Ω . On commence donc par étudier le problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

D'une part, si on suppose que (4.7) possède une solution, alors en utilisant des fonctions tests dans $\mathcal{D}(\Omega_i)$ on trouve que:

$$\int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) \varphi d\vec{x} = 0$$

ce qui peut être prolongé à $L^2(\Omega_i)$. On peut alors réécrire 4.7 sous la forme redondante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) q d\vec{x} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_i) \end{array} \right.$$

En intégrant par parties le premier terme de la première équation, on obtient la formulation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (f, f) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \text{ tel que } \forall (g, q) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \\ \int_{\partial\Omega_i^+} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds - \int_{\Omega_i} f (\vec{u} \cdot \nabla g) d\vec{x} = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) q d\vec{x} = 0 \end{array} \right.$$

On constate que l'on a trouvé une solution particulière (f, f) du problème mixte suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (f, p) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \text{ tel que } \forall (g, q) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \\ \int_{\partial\Omega_i^+} fg(\vec{u} \cdot \vec{n})ds - \int_{\Omega_i} p(\vec{u} \cdot \nabla g) d\vec{x} = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g(\vec{u} \cdot \vec{n})ds \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) q d\vec{x} = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Il nous faut maintenant établir l'équivalence entre les formulations 4.7 et 4.8. Supposons donc que (4.8) possède une solution. En utilisant la dernière équation de 4.8 et l'inclusion $\mathcal{H}^1(\Omega_i) \subset L^2(\Omega_i)$, l'intégration par parties nous donne:

$$0 = \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} = - \int_{\Omega_i} f(\vec{u} \cdot \nabla g) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_i} fg(\vec{u} \cdot \vec{n})ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$$

ce qui nous permet d'obtenir:

$$\int_{\partial\Omega_i^+} fg(\vec{u} \cdot \vec{n})ds = \int_{\Omega_i} f(\vec{u} \cdot \nabla g) d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} fg(\vec{u} \cdot \vec{n})ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$$

En remplaçant dans la première équation de (4.8):

$$- \int_{\Omega_i} (p - f) \vec{u} \cdot \nabla g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} fg(\vec{u} \cdot \vec{n})ds = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g(\vec{u} \cdot \vec{n})ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$$

Utilisant maintenant des fonctions $g \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ on trouve que:

$$- \int_{\Omega_i} (p - f) \vec{u} \cdot \nabla g d\vec{x} = 0 \quad \forall g \in \mathcal{D}(\Omega_i)$$

En prolongeant par continuité dans $\mathcal{H}^1(\Omega_i)$ et sachant que $f \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$ on a:

$$- \int_{\Omega_i} p(\vec{u} \cdot \nabla g) d\vec{x} = \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i} fg(\vec{u} \cdot \vec{n})ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$$

En remplaçant dans (4.8), on voit qu'on a ainsi trouvé une solution f de:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) q d\vec{x} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_i) \end{array} \right. \quad (4.9)$$

En choisissant $g \in \mathcal{D}$ on tire la première équation que $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$. la deuxième équation est donc redondante et le problème est équivalent à:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \end{array} \right.$$

On a donc équivalence entre les formulations (4.7) et (4.8).

Il reste maintenant à démontrer l'existence d'un solution de (4.8). Pour la démonstration on introduit les formes bilinéaires et linéaire suivantes:

$$a_i^+(f, g) = \int_{\partial\Omega_i^+} f g (u \cdot n) ds$$

$$a_i^-(f, g) = \int_{\partial\Omega_i^-} f g |u \cdot n| ds$$

$$b_i(f, q) = - \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) q d\vec{x}$$

et:

$$L_i(g) = a_i^-(f_i^-, g)$$

alors (4.8) s'écrit aussi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (f, p) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \text{ tel que:} \\ a_i^+(f, g) + b_i(g, p) = L_i(g) \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \\ b_i(f, q) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_i) \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Le lemme 1 (la démonstration des lemmes utilisés ici est reportée à la fin de cette section page 50) nous dit que a_i^+ , a_i^- , b_i et L_i sont continus, la bilinéarité et la linéarité étant évidentes. De plus, le lemme 2 nous assure que a_i^+ est coercive sur $\text{Ker } B_i$ où l'opérateur linéaire et continu B_i est défini, à l'aide de la forme bilinéaire b_i , par:

$$\begin{aligned} B_i : \mathcal{H}^1(\Omega_i) &\longrightarrow L^2(\Omega_i) \\ g &\longmapsto B_i g \end{aligned}$$

où:

$$b_i(g, q) = (B_i g, q)_{L^2(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i)} \quad \forall (g, q) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i)$$

De la même façon, on définit les opérateurs linéaires continus suivants:

$$\begin{aligned} B_i^t : L^2(\Omega_i) &\longrightarrow (\mathcal{H}^1(\Omega_i))' \\ q &\longmapsto B_i^t q \end{aligned}$$

par:

$$b_i(g, q) = \langle g, B_i^t q \rangle_{\mathcal{H}^1(\Omega_i) \times (\mathcal{H}^1(\Omega_i))'} \quad \forall (g, q) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i)$$

et:

$$\begin{aligned} A_i^+ : \mathcal{H}^1(\Omega_i) &\longrightarrow (\mathcal{H}^1(\Omega_i))' \\ f &\longmapsto A_i^+ f \end{aligned}$$

par:

$$a_i^+(f, g) = \langle A_i^+ f, g \rangle_{(\mathcal{H}^1(\Omega_i))' \times \mathcal{H}^1(\Omega_i)} \quad \forall (f, g) \in (\mathcal{H}^1(\Omega_i))^2.$$

Enfin, on définit l'opérateur:

$$\begin{aligned} A_i^- : \mathcal{H}^1(\Omega_i) &\longrightarrow (\mathcal{H}^1(\Omega_i))' \\ f &\longmapsto A_i^- f \end{aligned}$$

par:

$$a_i^-(f, g) = \langle A_i^- f, g \rangle_{(\mathcal{H}^1(\Omega_i))' \times \mathcal{H}^1(\Omega_i)} \quad \forall (f, g) \in (\mathcal{H}^1(\Omega_i))^2$$

Finalement (4.8) et (4.10) sont équivalent à:

$$\begin{cases} \text{Trouver } (f, p) \in \mathcal{H}^1(\Omega_i) \times L^2(\Omega_i) \text{ tel que:} \\ A_i^+ f + B_i^t p = A_i^- f_i^- & \text{dans } (\mathcal{H}^1(\Omega_i))' \\ B_i f = 0 & \text{dans } L^2(\Omega_i) \end{cases}$$

et en particulier, sur $\text{Ker} B_i$, le problème se réduit à:

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in \text{Ker} B_i \text{ tel que:} \\ a_i^+(f, g) = L_i(g) \quad \forall g \in \text{Ker} B_i \end{cases} \quad (4.11)$$

qui a une solution unique en vertu de la coercivité de a_i^+ sur $\text{Ker} B_i$, et de la continuité de $L_i(g)$.

D'autre part, pour f solution de 4.11, la forme linéaire $\mathcal{M}_i(g) = L_i(g) - a_i^+(f, g)$ est nulle sur $\text{Ker} B_i$ et \mathcal{M}_i est donc une fonctionnelle qui appartient à l'annihilateur de $\text{Ker} B_i$. Mais on a montré que $\text{Im} B_i^t$ est un fermé (lemme 3), ce qui est équivalent à dire que $\text{Im} B_i^t \equiv (\text{Ker} B_i)^\circ$. Il existe alors $p \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$ tel que:

$$b_i(g, p) = \mathcal{M}_i(g) \quad \forall g \in \mathcal{H}^1(\Omega_i)$$

On a donc l'existence d'une solution (f, p) (la dernière composante étant unique) du problème auxiliaire (4.8). On a finalement trouvé une unique solution f de la "version continue" du schéma de Lesaint-Raviart.

Maintenant sachant que (4.7) ou (4.8) possède une solution f unique, en utilisant des fonctions tests dans $\mathcal{D}(\Omega_i)$ on trouve $\vec{u} \cdot \nabla f \stackrel{p.p.}{=} 0$ ce qui entraîne que:

$$\int_{\partial\Omega_i^-} (f - f_i^-) g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad \forall g \in \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega_i)$$

La fonction f_i^- doit être égale à f presque partout sur $\partial\Omega_i^-$. C'est une condition de compatibilité qui nous dit que f_i^- doit être dans $(\text{Ker} B_i)|_{\partial\Omega_i^-}$. On en conclut

qu'une solution à notre problème est subordonnée à une certaine forme de régularité de f_i^- qui semble difficile à caractériser. On a donc solutionné le problème bien posé suivant:

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in \mathcal{G} \text{ tel que:} \\ \vec{u} \cdot \nabla f \stackrel{p.p.}{=} 0 \text{ dans } \Omega \\ f = f^- \end{cases}$$

On pourrait montrer que cette "solution continue" est stable en ce qui concerne la variation totale sur les frontières entrante et sortante. On reporte cette affirmation à la fin de la prochaine section, puisque ce concept de stabilité n'est en fait rien d'autre que la notion de schéma TVD (ou ENO) dans le cas discret.

De plus, de (4.8), on peut dire que f est solution du problème de point-selle suivant:

$$\inf_{g \in \mathcal{H}^1(\Omega)} \sup_{q \in L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \|\gamma_o(g)\|_{L^2(\partial\Omega^+; \vec{u} \cdot \vec{n} ds)}^2 - (q, \vec{u} \cdot \nabla g)_{L^2(\Omega)} - (f^-, g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right\}$$

Dans cette formulation, on a utilisé $q \in L^2(\Omega)$ afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté dans les termes qui interviennent entre accolades mais les raisonnements précédents permettent de dire qu'il existe une solution p plus régulière (en fait $p = f \in \mathcal{H}^1(\Omega)$). Ce qui revient à dire qu'on a trouvé une solution de:

$$\inf_{\substack{g \in \mathcal{H}^1(\Omega) \\ \vec{u} \cdot \nabla g = 0}} \left\{ \frac{1}{2} \|\gamma_o(g)\|_{L^2(\partial\Omega^+; \vec{u} \cdot \vec{n} ds)}^2 - (f^-, g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right\}$$

ou encore de:

$$\inf_{g \in \prod_{i=1}^n \text{ker } B_i} \left\{ \frac{1}{2} \|\gamma_o(g)\|_{L^2(\partial\Omega^+; \vec{u} \cdot \vec{n} ds)}^2 - (f^-, g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right\}$$

On a donc trouvé différentes formulations équivalentes si f^- est suffisamment régulière.

Formulation Forte

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{G} \text{ telle que:} \\ \vec{u} \cdot \nabla f \stackrel{p.p.}{=} 0 \text{ dans } \Omega \\ f = f^- \end{array} \right.$$

\Updownarrow

Formulation de Lesaint-Raviart

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{G} \text{ telle que:} \\ \sum_i^n \left\{ \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_i^-} (f - f_i^-) g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right\} = 0 \end{array} \right.$$

\Updownarrow

Formulation de Lesaint-Raviart duale

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{G} \text{ telle que:} \\ \sum_i^n \left\{ - \int_{\Omega_i} f \nabla \cdot (\vec{u} g) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega_i^+} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds + \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \right\} = 0 \end{array} \right.$$

\Updownarrow

Formulation Mixte

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (f, p) \in (\mathcal{G}) \times \prod_{i=1}^n L^2(\Omega_i) \text{ telle que:} \\ \sum_i^n \left\{ + \int_{\partial\Omega_i^+} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds - \int_{\Omega_i} p (\vec{u} \cdot \nabla g) d\vec{x} \right\} = - \sum_i^n \int_{\partial\Omega_i^-} f_i^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \\ \sum_i^n \int_{\Omega_i} (\vec{u} \cdot \nabla f) q d\vec{x} = 0 \end{array} \right.$$

\Updownarrow

Problème de minimisation avec contraintes

$$\min_{g \in \prod_i \text{Ker } B_i} \left\{ \frac{1}{2} \|\gamma_o(g)\|_{L^2(\partial\Omega^+; \vec{u} \cdot \vec{n} ds)}^2 - (f^- \cdot g)_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right\}$$

On obtient ainsi des approximations différentes en dimension finie.

On termine cette section en donnant la liste des restrictions qui nous ont permis d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution f pour ces différentes formulations.

(a) Le champ de vecteurs \vec{u} doit être assez régulier et sans zone de recirculation.

En fait, on a utilisé $\vec{u} \in (\mathcal{H}^2(\Omega))^2$:

(b) La solution f est supposée elle aussi régulière, c'est-à-dire dans $\prod_1^n \mathcal{H}^1(\Omega_i)$:

(c) f^- assez régulière.

4.1.1 Démonstration des lemmes

Pour la démonstration des lemmes suivants, on laisse tomber les indices i .

Lemme 1: $a^+(f, g)$, $a^-(f, g)$, $b(g, q)$ et $L(g)$ sont continues sur leurs espaces respectifs.

Preuve: En effet, $a^+(f, g)$ et $a^-(f, g)$ sont continues sur $(\mathcal{H}^1(\Omega))^2$:

$$\begin{aligned} |a^+(f, g)| &\leq \int_{\partial\Omega^+} |\gamma_o(f)|_{\partial\Omega^+} |\gamma_o(g)|_{\partial\Omega^+} |u \cdot n| ds \\ &\leq \sup \text{ess } \{|u \cdot n|\} (\|\gamma_o(f)\|_{\partial\Omega^+} \| \gamma_o(g) \|_{\partial\Omega^+}) \\ &\leq C \|\gamma_o(f)\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_o(g)\|_{L^2(\partial\Omega)} \end{aligned}$$

Cependant, $\gamma_o : \mathcal{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega) \xrightarrow{\text{cano.}} L^2(\partial\Omega)$. Donc, pour $\gamma_o(w) \in L^2(\partial\Omega)$ on a:

$$\|\gamma_o(w)\|_{L^2(\partial\Omega)} \stackrel{\text{cano.}}{\leq} C \|\gamma_o(w)\|_{\mathcal{H}^{1/2}(\partial\Omega)} \stackrel{\text{trace}}{\leq} C C' \|w\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow |a^+(f, g)| \leq C \|f\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \|g\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$$

On peut reprendre la même preuve avec a^- à la place de a^+ .

De plus, $b(g, q)$ est continue sur $\mathcal{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ puisque:

$$\begin{aligned} |b(g, q)| &\leq \int_{\Omega} \left| q \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| d\vec{x} \leq \|q\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{i=1}^n \|u_i \frac{\partial g}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq \|q\|_{L^2(\Omega)} \sup_{i=1, \dots, n} \{\sup \text{ess}(|u_i|)\} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \leq C \|g\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Enfin, si $f^- \in L^2(\partial\Omega^-)$, et en utilisant les mêmes raisonnements que pour a^+ et a^- , on montre que $L(g)$ est continue sur $\mathcal{H}^1(\Omega)$. \square

Lemme 2: $a^+(f, g)$ est coercive sur $\text{Ker} B$, c'est-à-dire:

$$\exists \alpha > 0 \text{ telle que } a^+(g_o, g_o) \geq \alpha \|g_o\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2, \quad \forall g_o \in \text{Ker} B$$

Preuve: Supposons que cela est faux, alors:

$$\forall n \in \mathcal{N}, \quad \exists h_n \in \text{Ker} B \text{ tel que } \frac{1}{n} \|h_n\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}^2 > a^+(h_n, h_n)$$

Posons $g_n = h_n / \|h_n\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$, ce qui implique que:

$$(a) \quad \|g_n\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = 1, \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

$$(b) \quad a^+(g_n, g_n) < 1/n \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

$\text{Ker} B$ est fermé (étant la préimage continue d'un fermé), et $\text{Ker} B$ est compact puisque $\text{Ker} B \subset \mathcal{H}^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Alors, il existe une sous-suite g_{n_k} telle que $g_{n_k} \rightarrow g$ dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n_k \rightarrow \infty$. D'après (b) $g_{n_k}|_{\partial\Omega^+} \rightarrow 0$. Puisque $\text{Ker} B$, muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)}$, est complet (fermé dans un complet) $g_{n_k} \rightarrow g$ dans $\text{Ker} B$. Or dans $\text{Ker} B$, si $g|_{\partial\Omega^+} = 0$ alors $g = 0$ dans Ω (continuité le long des caractéristiques). Donc:

$$0 = \|g\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \|g_{n_k}\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = 1$$

C'est une contradiction, ce qui complète la preuve. \square

Lemme 3: $\text{Im} B'$ est un fermé.

Preuve: En effet, d'après [5] montrer que $\text{Im} B'$ est un fermé est équivalent à montrer que $\text{Im} B$ est un fermé. Soit donc g_n une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$, on a alors que:

$$(a) \quad g_n \rightarrow g \in L^2(\Omega)$$

$$(b) \quad \frac{\partial g_n}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$$

D'une part on a que $\vec{u} \cdot \nabla g_n \rightarrow l \in L^2(\Omega)$, puisque $\vec{u} \in (\mathcal{H}^1(\Omega))^2$. D'après (b) et les théorèmes classiques sur les limites, on a que $\vec{u} \cdot \nabla g_n \rightarrow \vec{u} \cdot \nabla g$. En vertu de l'unicité de la limite dans $L^2(\Omega)$, on conclut que:

$$\vec{u} \cdot \nabla g_n \rightarrow \vec{u} \cdot \nabla g \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Ceci prouve que pour toute suite g_n de $\mathcal{H}^1(\Omega)$, il existe un g dans $\mathcal{H}^1(\Omega)$ tel que $\vec{u} \cdot \nabla g_n \rightarrow \vec{u} \cdot \nabla g$ dans $L^2(\Omega) \hookrightarrow (\mathcal{H}^1(\Omega))'$. Ce qui veut aussi dire que:

$$\forall \text{ suite } g_n \text{ dans } \mathcal{H}^1(\Omega), \exists g \text{ dans } \mathcal{H}^1(\Omega) \text{ tel que } B(g_n) \rightarrow B(g) \in \text{Im} B$$

Donc $\text{Im} B$ est un fermé. \square

4.2 Le problème de convection en dimension finie

Le paragraphe précédent nous a montré que l'extension "continue" de la méthode de Lesaint-Raviart sur une partition (que l'on ne fait pas tendre vers zero) est un problème bien posé si et seulement si f^- est suffisamment régulière (ce f^- dépend de la partition en tenant compte de l'alignement possible des frontières avec des caractéristiques). L'alignement des frontières des éléments avec une ou plusieurs caractéristiques est difficile (pour des raisons évidentes) sauf pour certains cas simples. Nous allons nous attarder à démontrer l'existence et l'unicité d'une solution du schéma de Lesaint-Raviart discret. L'existence de cette solution n'est pas aussi restrictive sur la condition frontière. En fait, pour tout $f_i^- \in L^2(\partial\Omega_i^-)$ le problème est bien défini. Cependant l'étude de cette solution nous permet de déterminer dans quel cas le problème discret est bien posé. Les conclusions de cette étude fournissent tout simplement les conditions nécessaires et suffisantes pour que le schéma de Lesaint-Raviart soit ENO (semblable au cas infini).

Soit la méthode de Lesaint-Raviart:

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in P^r(K) \text{ telle que:} \\ \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} - \int_{\partial K^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial K^-} f_K^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in P^r(K) \end{cases}$$

Pour la preuve on suppose que l'on a f_1 et f_2 , deux solutions du schéma de Lesaint-Raviart pour un champ de vecteurs $\vec{v} = e^{-k(x,y)} \vec{u}$ où $k(x,y)$ est une fonction quelconque. On a alors:

$$\int_K (\vec{v} \cdot \nabla (f_1 - f_2)) g d\vec{x} - \int_{\partial K^-} (f_1 - f_2) g (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0 \quad \forall g \in P^r(K) \quad (4.12)$$

On remarque que si $k(x,y) = 0$, alors $\vec{v} = \vec{u}$. Si on choisit $g = f_1 - f_2$, alors on peut réécrire:

$$\frac{1}{2} \int_K \vec{v} \cdot \nabla (f_1 - f_2)^2 d\vec{x} - \int_{\partial K^-} (f_1 - f_2)^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0$$

En intégrant par parties on obtient:

$$-\frac{1}{2} \int_K (\nabla \cdot \vec{v})(f_1 - f_2)^2 d\vec{x} + \frac{1}{2} \int_{\partial K} (f_1 - f_2)^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds - \int_{\partial K^-} (f_1 - f_2)^2 (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0$$

Puisque:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \nabla \cdot (\epsilon^{-k} \vec{u}) = -\epsilon^{-k} (\vec{u} \cdot \nabla k - \nabla \cdot \vec{u}) = -\epsilon^{-k} (\vec{u} \cdot \nabla k)$$

on a finalement:

$$\begin{aligned} & \int_K \epsilon^{-k} (\vec{u} \cdot \nabla k) (f_1 - f_2)^2 d\vec{x} + \int_{\partial K^+} (f_1 - f_2)^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \\ & + \int_{\partial K^-} (f_1 - f_2)^2 |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Il est possible de choisir $k(x, y)$ de sorte que $\vec{u} \cdot \nabla k > 0$ dans K , ce qui entraîne que f_1 et f_2 coïncident dans K (sur ∂K^- et ∂K^+ par positivité des termes de (4.13)). Donc, $f_1 = f_2$ dans K ce qui signifie que (4.12) est bijective. Puisque la perturbation par ϵ^{-k} peut être rendue aussi petite que l'on veut, il est clair que l'on a unicité de la solution pour le schéma de Lesaint-Raviart.

Démontrons maintenant les propriétés de cette solution. On peut écrire le schéma de Lesaint-Raviart sous la forme:

$$\int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} = \int_{\partial K^-} (f - f_K^-) g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in P^r(K)$$

où f et f_K^- sont connus. D'après le théorème de Riesz on a l'existence et l'unicité des polynômes $f_K \in P^r(K)$ et $f_{\partial K^-} \in P^r(\partial K^-)$ tels que $\forall g \in P^r(K)$:

$$\begin{aligned} (f_K, g)_{L^2(K)} &= \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} \\ &= \int_{\partial K^-} (f - \pi_{P^-(\partial K^-)}(f_K^-)) g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = (f_{\partial K^-}, g)_{L^2(\partial K^-)} \end{aligned}$$

où on a ajouté et retranché dans le membre de droite la projection $\pi_{P^-(\partial K^-)}(f_K^-)$ définie par:

$$\int_{\partial K^-} \pi_{P^-(\partial K^-)}(f_K^-) g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\partial K^-} f_K^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

La méthode de Lesaint-Raviart résout en général:

$$\begin{cases} \pi_{P^r(K)}(\vec{u} \cdot \nabla f) = f_K & \text{dans } K \\ f = \pi_{P^-(\partial K^-)}(f_K^-) + f_{\partial K^-}/(\vec{u} \cdot \vec{n}) & \text{sur } \partial K^- \end{cases} \quad (4.14)$$

Si on écrit $\vec{u} \cdot \nabla f = \pi_{P^r(K)}(\vec{u} \cdot \nabla f) + \pi_{P^r(K)}^\perp(\vec{u} \cdot \nabla f)$, où

$$\int_K \pi_{P^r(K)}(\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x} = \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g d\vec{x}$$

et $\pi_{P^r(K)}^\perp(\vec{u} \cdot \nabla f)$ est l'unique élément du complément orthogonal de $P^r(K)$. On a finalement:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \nabla f = \pi_{P^r(K)}^\perp(\vec{u} \cdot \nabla f) + f_K & \text{dans } K \\ f = \pi_{P^-(\partial K^-)}(f_K^-) + f_{\partial K^-}/(\vec{u} \cdot \vec{n}) & \text{sur } \partial K^- \end{cases} \quad (4.15)$$

avec $(f_K, g)_{L^2(K)} = (f_{\partial K^-}, g)_{L^2(\partial K^-)}$. On conclut donc que ce schéma ne résout pas le problème initial. Puisque f_K et $f_{\partial K^-}$ sont uniques, il semble suffisant de chercher à remplacer f_K^- par une projection qui permettrait d'obtenir $f_{\partial K^-} = 0$, ce qui entraîne que $f_K = 0$ et alors on aurait:

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \nabla f = \pi_{P^r(K)}^\perp(\vec{u} \cdot \nabla f) & \text{dans } K \\ f = \pi_{P^-(\partial K^-)}(f_K^-) & \text{sur } \partial K^- \end{cases}$$

Même s'il était possible de trouver une telle projection, on aurait en général une projection oscillatoire si f_K^- est irrégulière. Maintenant, s'il était possible de trouver une projection ENO il y aurait encore un problème puisque la première équation n'est pas un transport exact. Des oscillations seront en général observées dans K et donc transportées dans le reste du domaine Ω . Finalement, pour obtenir un transport exact il faut que $\vec{u} \cdot \nabla f \in P^r(K)$. Pour que cela soit possible il faut que ∇f puisse

en tout point de K être orthogonal à \vec{u} . Une condition nécessaire (peut-être trop forte) est que les polynômes de $P^r(K)$ soient au moins d'un degré supérieur au degré des polynômes utilisés pour approximer \vec{u} . S'assurer de toutes ces exigences n'est pas une mince affaire mais on dresse tout de même la liste des propriétés recherchées:

- (a) s'assurer que la discrétisation utilisée pour approximer le champ de vecteurs \vec{u} est compatible avec celle utilisée pour discrétiser la pseudo-concentration f ;
- (b) remplacer la condition frontière f^- par une projection TVD qui permet d'obtenir une solution exacte.

Ces deux conditions ressemblent beaucoup aux conditions que l'on avait établies à la fin de la section (4.1). La satisfaction de la condition (b) est un défi dans le cas général mais une façon simple d'obtenir une telle projection est d'effectuer la minimisation sous contraintes suivante:

$$\inf_{\substack{g \in P^r(K), \\ g|_{\partial K^-} \in [\min\{f_K^-, \max\{f_K^-\}]\}, \\ \vec{u} \cdot \nabla g = 0}} \left\{ \frac{1}{2} \|\gamma_0(g)\|_{L^2(\partial K^+; \vec{u} \cdot \vec{n} ds)}^2 - (f_K^-, g)_{L^2(\partial K^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \right\} \quad (4.16)$$

C'est la méthode mixte à laquelle on a ajouté la contrainte supplémentaire $g|_{\partial K^-} \in [\min\{f_K^-, \max\{f_K^-\}]\}$. A la fin du prochain chapitre on solutionnera analytiquement le problème de transport pour un champ de vecteurs constant à l'aide de *Mathematica* pour différentes formulations. On verra que les conditions (a) et (b) semblent inévitables pour obtenir une formulation faible à *transport essentiellement exact* (TEE). On parle ici de TEE puisque la résolution numérique de (4.16) ne satisfait les contraintes imposées qu'approximativement. Puisque (4.16) en plus de fournir une projection de f_K^- solutionne le problème de départ, la méthode de Lesaint-Raviart assujettie à la condition (b) devient un problème complexe devant (4.16).

En effet, on verra à l'aide de *Mathematica* que si l'on prend comme projection la restriction à ∂K^- de la solution f de (4.16) on retrouve la même solution f pour (4.2). Ce comportement est prévisible puisque la méthode de Lesaint-Raviart possède une solution unique. La formulation (4.2) n'a possiblement pas dit son dernier mot puisqu'il est possible de choisir des projections ENO qui enrayerent presque totalement les oscillations. On conclut que la projection (4.16) est probablement trop forte et qu'il est possible de construire des *formulations faibles de transport essentiellement exact* avec une condition au bord ENO pour une forme plus faible de la projection (4.16). Cette conclusion est soutenue par les résultats numériques présentés dans la première partie du chapitre des résultats et aussi par le fait qu'en différences finies, on utilise toujours des solveurs de Riemann approximatifs sans qu'il y ait détérioration des schémas engendrés. On renvoie le lecteur à Roe [60] pour la description d'une telle méthode. On ajoute finalement que cette approche de projection d'éléments en éléments évite de considérer la question de la condition frontière f_K^- compatible pour obtenir un schéma ENO qui, dans le cas discret, devient extrêmement complexe.

En plus de (a) et (b) il est indispensable de conserver les propriétés de la condition limite f_K^- (en conservant la monotonie et l'aire sous la courbe). Comme on l'a vu, pour le schéma original il n'y a aucun contrôle sur les propriétés mentionnées ci-haut, puisqu'en fait on solutionne (4.15). Il faut donc trouver une projection différente de la projection offerte par le schéma lui-même. Il est alors préférable de projeter préalablement f_K^- sur $\mathcal{C}^0(\partial K_i^-)$ de façon à ce que la totalité des exigences soient satisfaites et de remplacer f_K^- par cette projection dans le schéma final pour obtenir un *transport essentiellement exact* (ne présentant aucune dégradation de f_K^-). Cette thèse ne s'attarde pas à ces nouvelles propriétés mais on mentionne que l'on aura en fait un schéma ENO que si on conserve la monotonie et il sera conservatif si on conserve l'aire sous la courbe (voir le lemme 5). De plus, on omet les

considérations sur la précision des projections possibles en espérant que la dégradation de f^- par ce procédé n'est pas plus néfaste que de résoudre (4.15).

Lemme 5: Si on a $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$ dans chaque élément K alors le schéma est TVD.

Preuve: En effet, chaque partition Δs^- sur ∂K^- engendre en suivant les caractéristiques une partition Δs^+ sur ∂K^+ et dans ce cas:

$$\begin{aligned} & \left| f(x(s_{i+1}^-), y(s_{i+1}^-)) - f(x(s_i^-), y(s_i^-)) \right| = \\ & \left| f(x(s_{i+1}^+), y(s_{i+1}^+)) - f(x(s_i^+), y(s_i^+)) \right| \end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} & \sum_i \left| f(x(s_{i+1}^-), y(s_{i+1}^-)) - f(x(s_i^-), y(s_i^-)) \right| = \\ & \sum_i \left| f(x(s_{i+1}^+), y(s_{i+1}^+)) - f(x(s_i^+), y(s_i^+)) \right| \end{aligned}$$

Si les partitions sur $\{\Delta s^-\}$ engendrent toutes les partitions sur $\{\Delta s^+\}$ alors on aurait l'égalité en prenant le maximum de chaque côté. Si on suppose le contraire, alors il existe une partition $\{\Delta s^+\}$ qui n'est pas engendrée par une partition de $\partial\Omega^-$, mais cela est impossible puisqu'en remontant les caractéristiques dans le sens inverse on forme une nouvelle partition sur $\partial\Omega^-$. On peut alors conclure que:

$$\begin{aligned} & \max_{\Delta s_i^-} \left\{ \sum_i \left| f(x(s_{i+1}^-), y(s_{i+1}^-)) - f(x(s_i^-), y(s_i^-)) \right| \right\} = \\ & \max_{\Delta s_i^+} \left\{ \sum_i \left| f(x(s_{i+1}^+), y(s_{i+1}^+)) - f(x(s_i^+), y(s_i^+)) \right| \right\} \end{aligned}$$

On a donc finalement:

$$TV|_{\partial K^-}(f) = TV|_{\partial K^+}(f)$$

ce qui nous assure que le schéma est TVD dans le cas stationnaire. Ce type de raisonnement concorde avec la notion de schéma TVD en différences finies si on utilise des éléments espace temps.

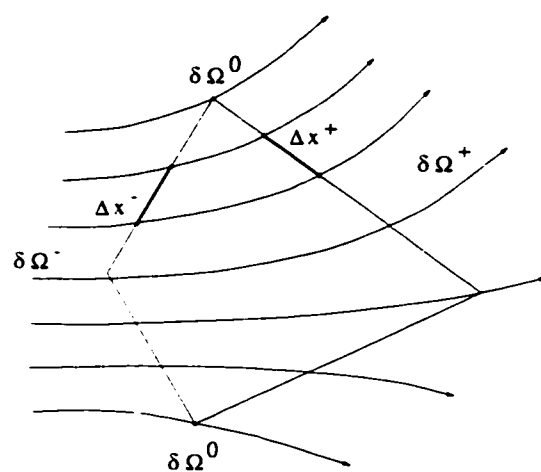


Figure 4.1 *Équivalence des partitions sur $\partial\Omega^-$ et sur $\partial\Omega^+$.*

CHAPITRE 5

Quelques méthodes possibles

En utilisant les informations des chapitres précédents, on élabore des scénarios possibles pour obtenir des méthodes avec de bonnes *propriétés physiques*. On débute avec la modification de la méthode de diffusion artificielle suivie de la populaire version SUPG. On suivra avec une modification de la méthode de Lesaint et Raviart dont on tire une variante avec conditions aux bords imposées fortement. Une méthode mixte élément par élément est élaborée pour finalement présenter un compromis qui simplifie considérablement la méthode de Lesaint-Raviart. Le but recherché est d'obtenir une méthode qui perçoit les irrégularités et les traite adéquatement, et cela de façon automatique (sans ajustement de paramètres ou autres inconvénients). Ceci se justifie par:

- (a) l'apparition possible d'irrégularités même si la condition frontière est régulière (voir figures 5.1, 5.2).
- (b) le fait qu'une fonction de pseudo-concentration erratique n'aide pas la résolution du problème non linéaire global.

5.1 Méthode de viscosité artificielle discontinue

Le présente section est vouée à la description d'une méthode qu'on pourrait nommer DSUPG (discontinuous Streamline Upwind Petrov/Galerkin). Une interprétation possible des méthodes TVD est qu'elles possèdent un détecteur "d'irrégularités" de

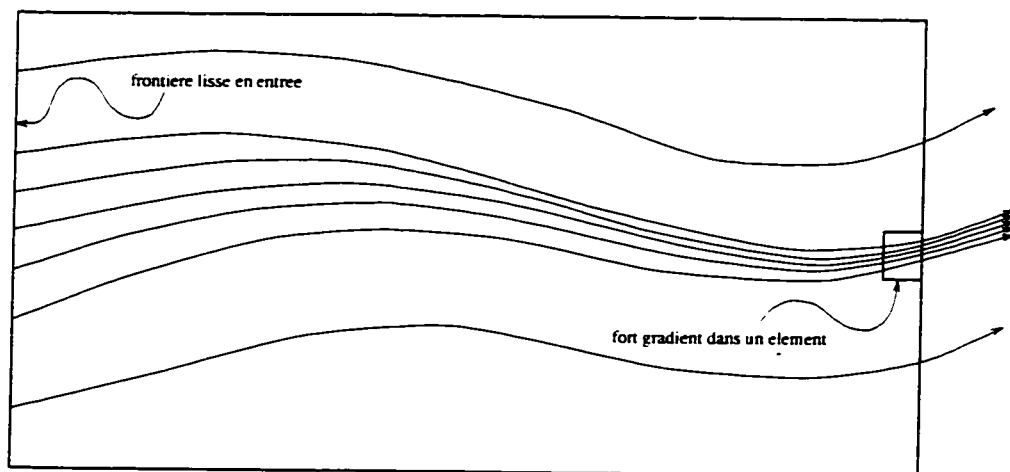


Figure 5.1 *L'apparition d'un fort gradient.*

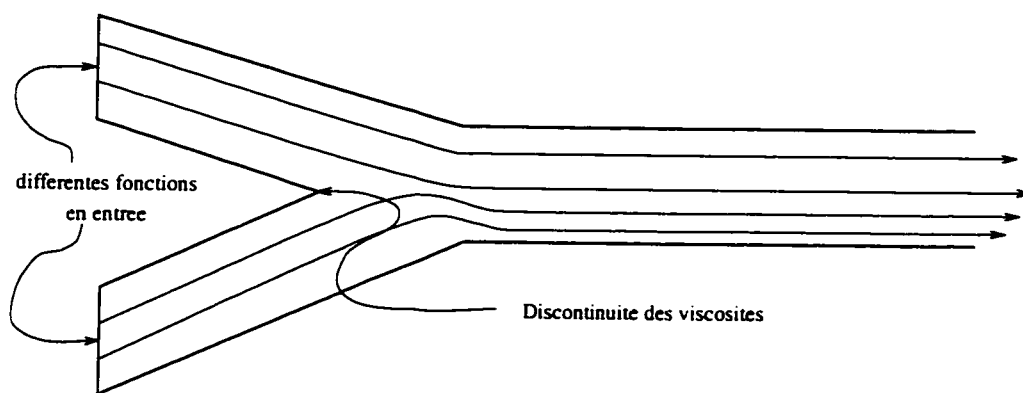


Figure 5.2 *L'apparition d'une discontinuité à la jonction de deux canaux.*

la solution. Ce détecteur fait basculer le schéma vers une version qui ajoute de la diffusion (schéma d'ordre un) là où la solution est "irrégulière" et conserve une haute résolution dans les autres régions. On peut reproduire ce type de comportement en introduisant le schéma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } f \in \mathcal{P}^r(K) \text{ tel que} \\ \int_K (d_K \mathbf{k} \nabla f) \cdot \nabla g dV + \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g dV - (1 + d_K) \int_{\partial K^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \\ \qquad \qquad \qquad = -(1 + d_K) \int_{\partial K^-} f_K^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \end{array} \right. \quad \forall g \in \mathcal{P}^r(K) \quad (5.1)$$

où \mathbf{k} est un tenseur et d_K un paramètre qui peut varier avec l'élément K . En particulier, $\mathbf{k} = \mathbf{Id}$ pour la méthode de viscosité artificielle classique. On remarque que si $d_K = 0$, alors on retrouve une méthode de Galerkin élémentaire (sur chaque K) avec conditions aux frontières faiblement imposées, qui n'est rien d'autre que la méthode de Lesaint-Raviart. Ce type de méthodes pourrait alors être "optimal" si on savait choisir les d_K sur chaque élément en fonction de la régularité de la condition frontière (sur ∂K^-). De plus, des estimations d'erreur (que l'on retrouve dans Johnson et Pitkäranta [41]), on tire que pour la méthode de Lesaint-Raviart:

$$\|f - f_h\|_{0,\Omega} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1,\Omega}$$

$$\|\vec{u} \cdot \nabla (f - f_h)\|_{0,\Omega} \leq C h^r \|f\|_{r+1,\Omega}$$

$$\|f - f_h\|_{\mathcal{L}^2(\partial\Omega; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1,\Omega}$$

L'introduction d'une viscosité artificielle introduit une perturbation du problème initial de l'ordre de $\mathcal{O}(h)$ et la méthode est donc au plus d'ordre un. Ce type de scénario reproduit exactement l'effet TVD tel qu'exposé aux chapitres 1 et 2. On a en fait un schéma qui oscille entre une méthode d'ordre un (ajout de viscosité) et une d'ordre supérieur. On dira que c'est la méthode de diffusion artificielle par

élément.

En posant $\mathbf{k} = \vec{u} \otimes \vec{u}$ et en remarquant que les estimations d'erreur pour les méthodes de Lesaint-Raviart et SUPG sont identiques (aux constantes C près), on obtient une variante moins diffusive élément par élément qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{P}^r(K) \text{ tel que} \\ \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) (g + d_K \vec{u} \cdot \nabla g) dV - (1 + d_K) \int_{\partial K^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \\ \qquad \qquad \qquad = -(1 + d_K) \int_{\partial K^-} f_K^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \end{array} \right. \quad \forall g \in \mathcal{P}^r(K)$$

et qui est la méthode SUPG sur chaque éléments K , si $d_K \neq 0$. C'est ce qu'on a appelé la méthode DSUPG et cette dernière est plus près des méthodes TVB ou ENO puisqu'il n'y a pas de dégradation de la précision lorsqu'on calcule une solution irrégulière. On remarque que si $d_K \rightarrow \infty$ alors on trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } f \in \mathcal{P}^r(K) \text{ tel que:} \\ \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) (\vec{u} \cdot \nabla g) dV - \int_{\partial K^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial K^-} f_K^- g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \end{array} \right. \quad \forall g \in \mathcal{P}^r(K)$$

qui n'est rien d'autre que la méthode Galerkin Least Squares (GLS) sur chaque élément avec conditions aux bords imposées faiblement. On renvoie le lecteur à l'article Perrochet et Aziérad [56] pour une version continue avec conditions frontières imposées fortement et qui possède d'excellentes propriétés. Finalement, cette version s'interprète aussi comme étant une pondération entre la méthode de Lesaint-Raviart et la méthode Galerkin Least Square par élément.

On souligne que les méthodes de diffusion artificielle par élément et DSUPG sont possiblement plus performantes que leur version continue. En effet, les versions continues sont liées à une condition frontière sur $\partial\Omega^-$ et à la continuité dans Ω . Ceci rend la solution dépendante de chaque point du maillage (en particulier sur

$\partial\Omega^-$), mais cela semble être assez localisé d'après Johnson (page 184). On sait que théoriquement, la solution le long d'une caractéristique est totalement dissociée de ce qui peut arriver sur les autres caractéristiques. Ce qui se passe sur une caractéristique est uniquement déterminé par la condition frontière sur $\partial\Omega^-$ et $\vec{u} \cdot \nabla f = s$. La version discontinue se concentre sur une fraction de la condition frontière (sur ∂K^-) ce qui entraîne une meilleure approximation de la condition frontière, et la discontinuité d'un élément à l'autre réduit énormément la dépendance sur les points avoisinants. Malheureusement, une caractéristique traverse en général plusieurs éléments, à moins que la frontière des éléments ne soit alignée avec la caractéristique, ce qui est très peu probable. On n'a donc pas une dissociation totale entre les solutions le long de caractéristiques avoisinantes. On en conclut que la solution en un point du maillage sera affectée par une modification de la condition frontière. Cette dépendance sur les caractéristiques avoisinantes est atténuée par le caractère discontinu des méthodes proposées. Elle devient presque inexistante lorsqu'on s'éloigne perpendiculairement des caractéristiques transportant la modification de f sur $\partial\Omega^-$. Comme les versions discontinues sont plus près de cette *propriété physique*, elles semblent plus aptes à la résolution de tels problèmes. De plus, les versions continues font intervenir en général des paramètres fixes dans tout Ω . Dans le cas où la viscosité est non nulle on peut définir des paramètres variables (voir par exemple [28]). Il y a donc perte de flexibilité. Les estimations d'erreurs permettent de dire que sur la frontière:

$$\|f^- - f_h\|_{L^2(\partial\Omega^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)} \leq C h^{r+1/2} \|f\|_{r+1, \Omega}$$

et donc qu'on a un ordre de précision optimal de la condition frontière. Par contre, aucune information n'est donnée sur la conservation de la monotonie ou de la masse sur ∂K . De plus, le caractère diffusif atténuera dans K la formation d'oscillations possibles sur ∂K et le schéma ne produira des solutions non acceptables que localement (près de ∂K).

5.2 La méthode de Lesaint-Raviart modifiée

Cette méthode pourrait être nommée EDG (Exact Discontinuous Galerkin) et découle directement des résultats obtenus au chapitre 4.

$$\begin{cases} \text{Trouver } f \in \mathcal{P}^r(K) \text{ tel que} \\ \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g dV - \int_{\partial K^-} f g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial K^-} \hat{\pi}(f_K^-) g (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds, \quad \forall g \in \mathcal{P}^r(K), \end{cases} \quad (5.2)$$

où $\hat{\pi}(f_K^-)$ est une projection compatible au sens du chapitre 4. Mais comme on l'a remarqué à la dernière section du chapitre 4, si on avait une telle projection on aurait aussi la solution du problème fort discrétisé. On se tourne donc vers des projections moins exigeantes qui seront simplement des régularisations de la condition frontière. Ces projections ne sont pas compatibles, mais sont plus acceptables (non-oscillatoires, conserve la masse, ... etc) que la condition donnée (discontinuité possible à la frontière entrante). Une fois cette nouvelle condition frontière acceptable obtenue, on la substitue à f_K^- dans le schéma de Lesaint-Raviart (voir Fortin, Béliveau et Demay [23]). On arrive à des projections "acceptables" par l'une des trois approches suivantes:

(a) La régularisation par convolution numérique $\hat{\pi}(f_K^-) = \rho_\epsilon * f_K^-$ où

$$\hat{\pi}(f_K^-) = \int_{\partial K^-} f_K^- g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

avec g une fonction polynômiale par morceaux à support compact (voir par exemple, Scharz) [61].

(b) La régularisation par diffusion:

$$d_K \int_{\partial K^-} \nabla (\hat{\pi}(f_K^-)) \cdot \nabla g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds + \int_{\partial K^-} \hat{\pi}(f_K^-) g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \int_{\partial K^-} f_K^- g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

(c) La régularisation par minimisation sous contrainte:

$$\min_{\substack{g \in \{\min(f_K^-, \max(f_K^-, \tilde{\pi}(f_K^-)))\} \\ g \in \mathcal{P}^r(K)|_{\partial K^-}}} \left\{ \frac{1}{2} \|g - f_K^-\|_{\mathcal{L}^2(\partial K^-; |\vec{u} \cdot \vec{n}| ds)}^2 \right\}$$

Une fois cette projection obtenue on peut définir à l'aide d'un relèvement la méthode Galerkin discontinue avec conditions aux limites imposées fortement suivante:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \tilde{f} \in \mathcal{P}_0^r(K) \text{ tel que} \\ \int_K (\vec{u} \cdot \nabla \tilde{f}) \tilde{g} dV = - \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f_0) \tilde{g} dV, \quad \forall \tilde{g} \in \mathcal{P}_0^r(K) \end{cases}$$

où $\mathcal{P}_0^r(K)$ est l'espace des polynômes de degré r nuls sur ∂K^- . $\tilde{f} = f - f_0$ et $f_0 = \tilde{\pi}(f_K^-)$ sur ∂K^- . On remarque que cette méthode est peu intéressante numériquement puisque l'on doit déterminer ∂K^- et f_0 sur chaque élément ce qui complexifie inutilement la programmation. Il est plus facile de calculer les intégrales dans (5.2). Cependant, cette version aurait l'avantage de réduire les calculs sur chaque élément. À la lumière du chapitre 4, il faut s'assurer dans les deux cas que $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$. Cela est possible en choisissant un espace pour la solution f compatible avec l'espace utilisé pour \vec{u} . Dans ce cas on a des méthodes ENO si la condition frontière $\tilde{\pi}(f_K^-)$ est essentiellement non-oscillatoire (ENO).

5.3 La méthode mixte discontinue

Cette approche est tirée de la populaire méthode mixte utilisée pour résoudre les équations de Stokes. En effet, pour cette dernière méthode, la construction d'éléments finis qui satisfont la contrainte $\text{div}(\vec{u}) = 0$ étant coûteuse et inutilement complexe, on préfère approximer cette contrainte en utilisant un algorithme de recherche de point-selle. Comme on l'a constaté aux sections précédentes, le choix des d_K ou la détermination des conditions au bord acceptables est difficile ou sujet à une forme

d'indétermination. Il faut construire un détecteur d'irrégularités, ou introduire des conditions frontières approchées. Le chapitre 4 nous montre que l'on peut définir une méthode mixte élémentaire qui est équivalente à celle de Lesaint-Raviart dans le cas continu. Par contre, dans le cas discret cette méthode offre la possibilité d'obtenir un *transport essentiellement exact*, c'est-à-dire $\vec{u} \cdot \nabla \tilde{f} = \epsilon$ où ϵ est extrêmement petit. Cela se résume donc en une méthode qui minimise la distance entre la condition frontière f^- et $f|_{\partial\Omega^-}$ sous la contrainte $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$, à la précision de la machine. On obtient la méthode mixte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (f, p) \in \mathcal{P}^{r_1}(K) \times \mathcal{P}^{r_2}(K) \text{ tel que:} \\ \int_{\partial K^+} f g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds - \int_K (\vec{u} \cdot \nabla g) p dV = - \int_{\partial K^-} \tilde{\pi}(f_K^-) g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad \forall g \in \mathcal{P}^{r_1}(K) \\ \int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) q dV = 0 \quad \forall q \in \mathcal{P}^{r_2}(K) \end{array} \right.$$

En général, r_1 et r_2 sont différents et r_2 est choisi de sorte que $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$. Cette méthode est donc ENO si la projection $\tilde{\pi}(f_K^-)$ est ENO. Pour obtenir une condition frontière $\tilde{\pi}(f_K^-)$ qui soit ENO, il suffit de reprendre directement les méthodes de régularisation (a), (b) et (c) de la section précédente.

5.4 La méthode bornée

Cette méthode tire son nom du fait qu'elle est une adaptation de la méthode de Lesaint-Raviart, sachant que la pseudo-concentration est toujours comprise dans l'intervalle $[0, 1]$. Cette modification de la méthode de Lesaint-Raviart s'apparente à la résolution d'un problème d'inéquation variationnelle (voir Lions [50] et Kardes-tuncer [43]). On veut résoudre:

$$\int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g dV - \int_{\partial K^-} f g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{\partial K^-} f_K^- g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds \quad (5.3)$$

sous la contrainte:

$$\left\{ \begin{array}{l} -f \leq 0 \\ f - 1 \leq 0 \end{array} \right.$$

Par le biais d'un lagrangien augmenté, Fortin-Glowinski [26] donne un algorithme, qu'ils appellent ALG2, pour la résolution de tels problèmes. Dans notre cas, en posant $\tilde{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2)$ et $\tilde{\beta} = (\beta^1, \beta^2)$, une version possible d'ALG2 s'écrit:

- Étant donnés $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\beta}_1$:

- Tant que $\|\tilde{\lambda}_{i+1} - \tilde{\lambda}_i\| \geq \epsilon$, effectuer:

- * Tant que $\|f_j - f_{j-1}\| \geq \epsilon$ et $\|\tilde{\beta}_j - \tilde{\beta}_{j-1}\| \geq \epsilon$, effectuer

- * Résoudre le système linéaire pour f_j^n :

$$\begin{aligned} & \int_K \tilde{u} \cdot \nabla f_j g \, dx - \int_{\partial K^-} \tilde{u} \cdot \tilde{n}_K f_j g \, ds + r \int_K (2f_j - 1)g \, dx \\ &= - \int_{\partial K^-} \tilde{u} \cdot \tilde{n}_K (f_j)g \, ds + r \int_K (-\beta_j^1 + \beta_j^2)g \, dx - \int_K (-\lambda_i^1 + \lambda_i^2)g \, dx \end{aligned}$$

- * Mise à jour de $\tilde{\beta}$:

$$\begin{aligned} \beta_{j+1}^1 &= \min\{0, -f_j + \lambda_i^1/r\} \\ \beta_{j+1}^2 &= \min\{0, f_j - 1 + \lambda_i^2/r\} \end{aligned}$$

- Mise à jour de $\tilde{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{i+1}^1 &= \lambda_i^1 + \rho(-f_j - \beta_{j+1}^1) \\ \lambda_{i+1}^2 &= \lambda_i^2 + \rho(f_j - 1 - \beta_{j+1}^2) \end{aligned}$$

- Fin de l'algorithme

Cette méthode résulte en un schéma non linéaire qui réduit l'efficacité du schéma de Lesaint-Raviart par un facteur de deux ou trois. De plus, la vitesse de convergence de ce schéma dépend de r qui semble être "optimal" pour des $r \in [1, 10^3]$. L'intérêt de cette méthode est que la détermination du paramètre r n'est pas trop exigeante par rapport aux autres méthodes.

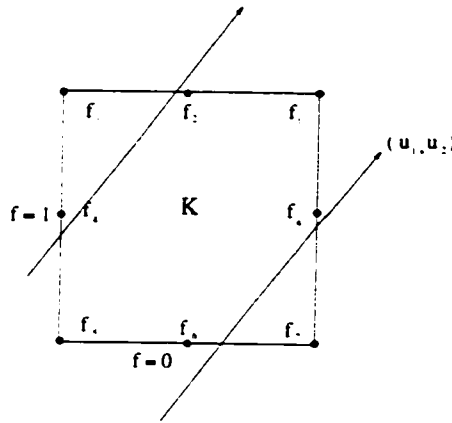


Figure 5.3 Problème test.

5.5 Méthodes de Lesaint-Raviart et mixte sur *Mathematica*

Cette section a un double but. Premièrement on veut vérifier si les résultats théoriques concernant la méthode mixte sont observés sur un exemple. Autrement dit, est-ce-qu'on a une solution dans $\text{Ker } B$. Deuxièmement, on confronte cette nouvelle méthode avec la méthode de Lesaint-Raviart. On utilise ici un test très simple. Les résultats ne sont donc pas généraux mais démontrent bien le comportement des méthodes. On choisit un champ de vecteurs constant (u_1, u_2) et une condition frontière de 1 sur un côté de ∂K^- et 0 sur l'autre. On peut visualiser le problème étudié à la figure (5.3). On remarque que f_K^- est discontinue au noeud 5.

Pour vérifier si les programmes *Mathematica* étaient exacts, on a utilisé deux techniques de validation. Premièrement, on construit la validation pour la méthode de Lesaint-Raviart:

$$\int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g dV = \int_{\partial K^-} (f - \hat{\pi}(f_K^-)) g(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

Si on choisit des $g \in V$, où V est l'espace des fonctions telles que la restriction de g

à ∂K^- est égale à zéro, alors d'une part on obtient:

$$\int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g dV = 0 \quad \forall g \in V$$

et d'autre part, si on utilise $g \in W$, où W est l'espace des fonctions telles que la restriction de g à ∂K^- soit $f - \pi_{\mathcal{L}^2(\partial K^-)}(f_K^-)$, alors on a:

$$\int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g dV = \int_{\partial K^-} (f - \pi_{\mathcal{L}^2(\partial K^-)}(f_K^-))^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds, \quad \forall g \in W$$

Maintenant, on peut toujours écrire $g \in W$ comme étant la somme d'une fonction $g_1 \in V$ et d'une fonction g_2 nulle sur $\partial K^0 \cup \partial K^+$ et égale à $f - \pi_{\mathcal{L}^2(\partial K^-)}(f_K^-)$ sur ∂K^- . Dans ce cas on a finalement:

$$\int_K (\vec{u} \cdot \nabla f) g_2 dV = \int_{\partial K^-} (f - \pi_{\mathcal{L}^2(\partial K^-)}(f_K^-))^2 (\vec{u} \cdot \vec{n}) ds = \text{constante}, \quad \forall g \in W.$$

Comme on l'a vu (sous une autre forme) au chapitre 3, cette constante n'est pas nécessairement nulle. On a effectué des essais pour une multitude de champs de vecteurs et de conditions frontières et on a observé que cette égalité est toujours vérifiée.

En ce qui concerne la méthode mixte, la technique de validation est la suivante. On définit des fonctions de base quadratiques en dimension un. Par la suite on ajoute une dimension orthogonale à celle utilisée pour les fonctions de base et on forme ainsi la famille des cylindres quadratiques. Il suffit maintenant d'effectuer une rotation de ces cylindres de telle sorte que leurs isolignes soient parallèles aux caractéristiques du champ de vecteurs $\vec{u} = \text{constante}$. On forme ainsi l'espace des fonctions g telles que $\vec{u} \cdot \nabla g = 0$ ($g \in \text{Ker} B$). Une fois cette tâche accomplie, on cherche à minimiser la distance entre f_K^- et l'espace des restrictions à ∂K^- des fonctions de $\text{Ker} B$. On obtient ainsi la fonction dans $\text{Ker} B$ qui est la plus proche de f_K^- sur ∂K^- . C'est

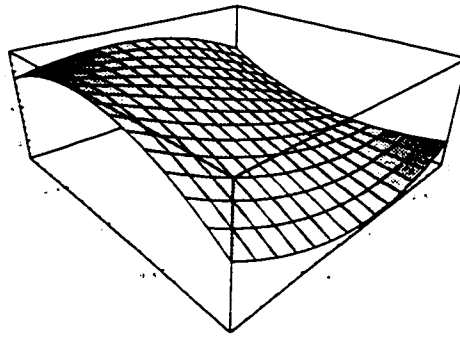
exactement ce que la méthode mixte fait et on la validera en trouvant des solutions à l'aide de la méthode décrite ci-haut pour une panoplie de f_K^- . On vérifiera que la méthode mixte donne les mêmes résultats. On remarque que si l'on substitue la restriction de la solution du problème mixte dans le schéma de Lesaint-Raviart à la place de f_K^- alors on obtient la même solution. Cependant, si on refait la même chose avec la restriction de la solution du problème de Lesaint-Raviart on obtient une autre solution et si on répète le processus, la solution obtenue devient de plus en plus oscillante. On remarque finalement que le même genre de procédé peut être appliqué à des isolignes courbes, mais vu la complexité de cette approche, on n'a pas insisté sur le développement d'une telle méthode numérique (fonctions de bases à transport exact). La méthode mixte est dans ce cas la bienvenue (ici à transport exact puisque *Mathematica* résout analytiquement le système engendré) puisqu'elle impose que la solution soit dans $\text{Ker } B$ sans avoir à construire des fonctions de bases à transport exacte.

Une fois les deux méthodes validées, on présente quelques cas typiques de solutions. Le premier cas est pour le champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$. En observant le tableau qui suit et les figures (5.4) et (5.5), on remarque que les maxima et minima des deux méthodes sont du même ordre. Cela ne dépend pas de la taille de l'élément ni de la hauteur du saut puisqu'il est clair que l'on peut reproduire de tels changements par un rééchelonnement. On ne peut conclure aussi facilement sur un élément non rectangulaire. Cependant la méthode de Lesaint-Raviart semble donner une solution dont la restriction à ∂K^- est plus près de f_K^- .

La première ligne du tableau représente les valeurs de la fonction de pseudo-concentration aux huit noeuds d'interpolation (voir la figure 5.3)). La deuxième ligne correspond à la méthode de Lesaint-Raviart et la troisième correspond à la méthode

Tableau 5.1 Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$ et $d_K = 0$

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
L.-R.	0.5	1.04545	0.90901	1.21591	0.5	-0.215909	0.0909091	-0.0454545
mixte	0.5	0.875	1.25	0.875	0.5	0.125	-0.25	0.125

Figure 5.4 Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$.

mixte. Cette description est valable pour tous les tableaux qui suivent.

Afin de réduire les oscillations, on introduit un terme de diffusion comme au (b) de la section 5.2 (régularisation de la condition à la frontière). Une diffusion de $d_K = 1/3$ a été choisie puisque pour des valeurs plus petites, les deux méthodes présentent encore des oscillations. Le tableau suivant et les figures (5.6) et (5.7) témoignent que la méthode de Lesaint-Raviart est dans ce cas non oscillante alors qu'il faudrait encore ajouter de la diffusion pour la méthode mixte. Puisque les solutions possibles autres que le plan sont des cylindres quadratiques, on comprend que la méthode

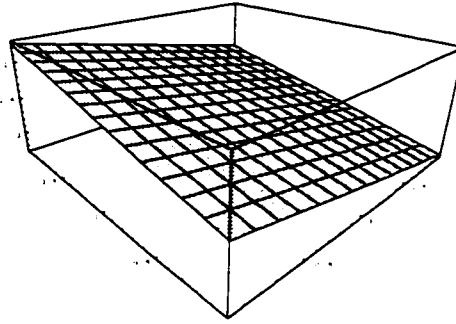


Figure 5.5 Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$.

Tableau 5.2 Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 1)$ et $d_K = 1/3$

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
L.-R.	0.5	0.881818	0.990909	0.95	0.5	0.05	0.00909091	0.118182
mixte	0.5	0.8	1.1	0.8	0.5	0.2	-0.1	0.2

mixte dans ce cas choisit un plan. Dans le cas contraire on aurait une fonction dont la solution a plus de poids d'un côté que de l'autre ce qui est contradictoire avec le choix de $\vec{u} = (1, 1)$ et la condition frontière choisie.

On présente maintenant l'essai effectué pour le champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ pour la même condition frontière. On remarque encore ici que les oscillations sont du même ordre comme on peut le voir au tableau suivant et aux figures (5.8) et (5.9).

Si on ajoute maintenant de la diffusion à la frontière avec un coefficient $d_K =$

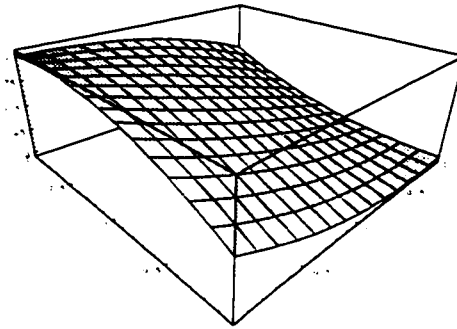


Figure 5.6 *Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.*

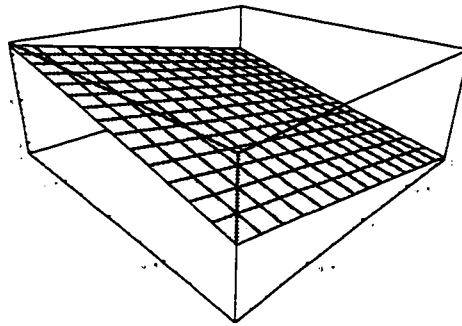


Figure 5.7 *Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 1)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.*

Tableau 5.3 Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ et $d_K = 0$

	f_1	f_2	f_3	f_4
L.R.	-0.091791	0.207653	1.26923	0.883381
mixte	0.282686	-0.142697	0.25404	-0.0466022
	f_5	f_6	f_7	f_8
L.R.	-0.0898437	-0.200195	1.28125	0.833008
mixte	0.472656	-0.01810547	0.15625	-0.0107422

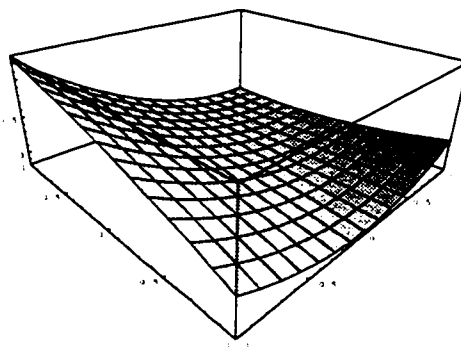


Figure 5.8 Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$.

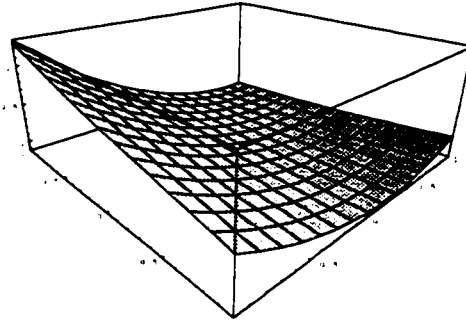


Figure 5.9 Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$.

1/3, c'est la méthode mixte qui est moins oscillatoire. On se référera au tableau suivant pour les valeurs numériques et aux figures (5.10) et (5.11) pour l'aspect visuel.

On peut dire de façon générale que la méthode mixte nous assure que ce qui entre dans le domaine ressortira identiquement de l'autre côté et que si on ajoute suffisamment de viscosité sur la frontière on obtient une méthode ENO. On a vu que dans certains cas la méthode de Lesaint-Raviart semble plus précise que la méthode

Tableau 5.4 Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 3)$ et $d_K = 1/3$

	f_1	f_2	f_3	f_4
L.-R.	-0.00724297	0.272063	1.0106	0.714526
mixte	0.156185	-0.0149375	0.0512788	-0.0797179
	f_5	f_6	f_7	f_8
L.-R.	-0.000969744	0.259116	0.93813	0.665244
mixte	0.438906	0.0391777	0.0583786	0.00543057

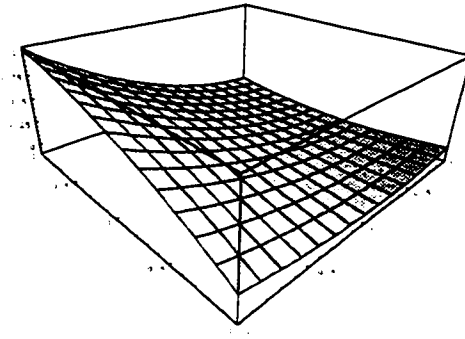


Figure 5.10 *Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.*

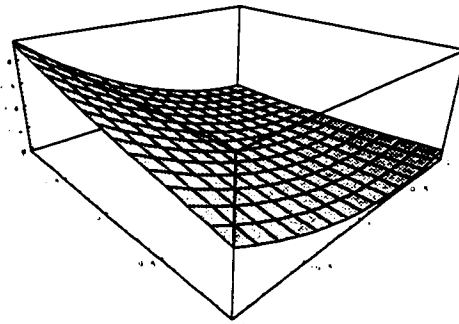


Figure 5.11 *Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 3)$ et une diffusion à la frontière de $d_K = 1/3$.*

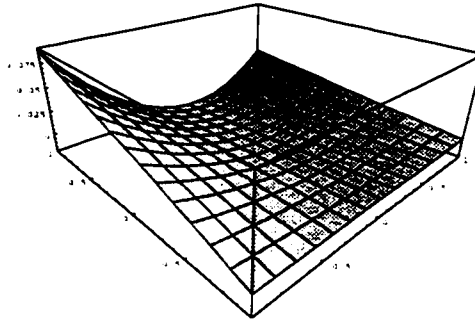


Figure 5.12 *Méthode de Lesaint-Raviart avec $(u_1, u_2) = (1, 100)$.*

mixte, mais son caractère de transport non exact nous laisse songeur quand à la nature de la fonction f dans l'élément K (propagation sur les autres éléments par le biais de ∂K^+) pour des champs de vecteurs plus complexes et cela même si la condition frontière a subi un traitement adéquat. De plus, en différences finies les méthodes de type TVD sacrifient de la précision au voisinage d'une discontinuité au profit d'une approximation locale non oscillante avec un transport exact. On croit que la méthode mixte couplée à un coefficient de viscosité local serait du même type.

On présente maintenant une propriété des deux schémas qui démontre que mis à part l'existence d'un schéma performant, le maillage adaptatif pourrait être la clef du succès. En effet on voit sur les figures (5.12) et (5.13) que pour un champ de vecteurs $(u_1, u_2) = (1, 100)$, les solutions des deux schémas sont très près de zéro (voir le tableau suivant).

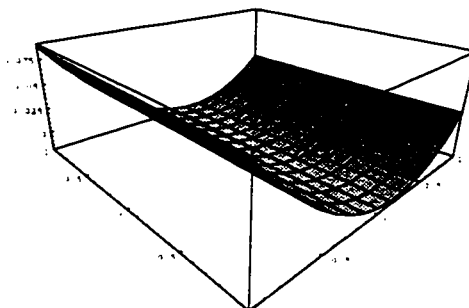


Figure 5.13 Méthode mixte avec $(u_1, u_2) = (1, 100)$.

Tableau 5.5 Champ de vecteurs $\vec{u} = (1, 100)$ et $d_K = 0$

	f_1	f_2	f_3	f_4
L.-R.	0.0275179	-0.0140353	0.0877734	0.0442563
mixte	0.000725507	-0.00036262	0.000725452	0.0141817
	f_5	f_6	f_7	f_8
L.-R.	0.0262928	-0.0138229	0.0873541	0.0856429
mixte	0.0839459	-0.0144052	0.0285363	0.0274075

On fait la mise en garde que les graphiques représentant ces solutions ont été rééchelonnés et qu'il faut donc vérifier l'axe des z pour repérer les échelles utilisées. Ce rééchelonnement des figures permet de mieux visualiser les fonctions qui seraient autrement presque illisibles pour une échelle de l'ordre de 1.

Ceci s'explique par le terme $\vec{u} \cdot \vec{n}$ dans:

$$\int_{\partial K^-} fg(\vec{u} \cdot \vec{n}) ds$$

En effet, la partie de l'intégrale dont la normale est presque perpendiculaire à \vec{u} est négligeable devant la partie où \vec{u} s'aligne presque avec la normale et l'intégrale donne de l'importance au côté franchement entrant. Finalement, si on possédait une stratégie de remaillage qui peut aligner les frontières des éléments avec l'interface, la majorité des problèmes envisagés dans cette thèse disparaîtrait. Cependant comme on peut le voir par les valeurs numériques du tableau précédent, de légères oscillations sont tout de même générées et un traitement comme celui mentionné aux sections précédentes est encore probablement nécessaire.

CHAPITRE 6

Modélisation et résultats numériques

Ce chapitre présente les résultats numériques obtenus pour la résolution des équations de Stokes couplées à l'équation de transport pour la pseudo-concentration et à une équation de comportement pour le tenseur des extra-contraintes (dans le cas viscoélastique). De bons résultats sont obtenus pour les problèmes de coextrusion dans le cas visqueux et cela en utilisant les approches présentées dans le chapitre précédent. En raison des difficultés mentionnées précédemment en ce qui concerne le choix des paramètres optimaux d_K d'élément en élément, on se limite pour le reste des résultats à l'utilisation exclusive de la méthode bornée pour résoudre l'équation de convection. On présentera ainsi d'autres résultats de coextrusion dans les cas non newtonien et viscoélastique dans une géométrie dont l'entrée est la jonction en V de deux canaux avec une contraction 4 : 1 en sortie. Un autre problème de coextrusion dans le cas viscoélastique est résolu de façon acceptable (malgré quelques difficultés en sortie pour le tenseur des extra-contraintes) dans une géométrie en T. Par la suite on présente les résultats obtenus dans le cas du moulage par injection dans un coude (cas newtonien). Finalement, on présente des résultats pour des problèmes dont la dynamique est régie par le phénomène de tension superficielle.

Dans un premier temps, on présente la modélisation générale des problèmes étudiés et par la suite on donne les résultats.

6.1 Modélisation du problème

6.1.1 Les équations de Stokes

On considère le cas de deux fluides (fluide 0 et fluide 1) dans un domaine bidimensionnel Ω . Le cas général se traite de façon identique. On note Ω_i les domaines respectivement occupés par le fluide de viscosité η_i ($i = 0, 1$ et $\Omega \equiv \Omega_0 \cup \Omega_1$) et Γ représentera l'unique interface entre les deux fluides ($\Gamma \equiv \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1$). Les équations sont données par:

- conservation de la quantité de mouvement:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \vec{s} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega_i \quad (6.1)$$

- conservation de la masse:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega_i \quad (6.2)$$

où \vec{s} est une force volumique et $\boldsymbol{\sigma}_i$ est le tenseur des contraintes de Cauchy défini par:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\tau}_i - p_i \mathbf{Id} \quad \forall \vec{x} \in \Omega_i$$

Pour cette dernière équation, $\boldsymbol{\tau}_i$ est le tenseur des extra-contraintes et p_i est la pression dans Ω_i . L'équation (6.2) n'est rien d'autre que la condition d'incompressibilité classique. On ajoute que pour les écoulements polymériques, les effets dus à la gravitation et l'inertie sont généralement négligeables.

Pour modéliser le tenseur des extra-contraintes $\boldsymbol{\tau}_i$, différentes approches permettent d'introduire une loi de comportement (voir par exemple Bird et *al.* [3]). Puisque ce type d'équation fait intervenir le champ de vitesse \vec{u} , on peut fermer le

système (6.1) et (6.2). Afin de décrire τ_i , on choisit le modèle de Phan-Thien-Tanner (PTT) [57]:

$$\left(1 + \frac{\lambda_i \epsilon_i}{\eta_i} \text{tr}(\tau_i)\right) \tau_i + \lambda_i \frac{\delta \tau_i}{\delta t} = 2\eta_i(|\dot{\gamma}(\vec{u})|)\dot{\gamma}(\vec{u}) \quad (6.3)$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\delta \tau_i}{\delta t} &= \frac{\partial \tau_i}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \tau_i - \nabla \vec{u} \cdot \tau_i - \tau_i \cdot (\nabla \vec{u})^t \\ |\dot{\gamma}(\vec{u})| &= (2 \sum_{i,j} \dot{\gamma}(\vec{u})_{ij} \dot{\gamma}(\vec{u})_{ji})^{1/2} \end{aligned}$$

et

$$\dot{\gamma}(\vec{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t)$$

est la partie symétrique du gradient de vitesse $\nabla \vec{u}$. De plus, λ_i est une constante rhéologique représentant le temps de relaxation, η_i est la viscosité et ϵ_i un autre paramètre qui dépend du fluide i . Cette forme d'équation de comportement permet de distinguer les deux cas suivants:

- (a) cas viscoplastique ou purement visqueux ($\lambda_i = 0$, $i = 0,1$):
- (b) cas viscoélastique ($\lambda_i \neq 0$, $i = 0,1$):

Si les fluides ($i = 0,1$) sont purement visqueux le système (6.1) et (6.2) est fermé puisque la relation (6.3) s'écrit dans ce cas:

$$\tau_i = 2\eta_i(|\dot{\gamma}(\vec{u})|)\dot{\gamma}(\vec{u}) \quad i = 0,1$$

et est explicite. Ceci permet de remplacer directement τ_i dans l'expression du tenseur des contraintes de Cauchy σ_i et par la suite dans l'équation de mouvement. On obtient alors un problème de Stokes non linéaire même si les termes d'inertie ont été préalablement négligés. Une linéarisation comme dans Carrier [6] doit alors être

effectuée.

Dans le cas où au moins l'un des fluides est viscoélastique, l'équation de comportement est implicite et le système global est donné par les trois équations (6.1), (6.2) et (6.3) qui doivent être satisfaites dans tout le domaine Ω . On supposera dans ce cas que la viscosité η_i est constante dans Ω_i et ne dépend pas du taux de cisaillement $|\dot{\gamma}(\vec{u})|$.

Finalement, on doit donner des conditions sur l'interface entre les différents fluides.

6.1.2 Condition de non-miscibilité et d'équilibre à l'interface

La première condition que l'on impose sur l'interface est la non-miscibilité des deux fluides. Dans Segel [62], on définit une fonction $f(\vec{u}, t)$ telle que l'interface Γ est définie par tous les (\vec{x}, t) qui satisfont $f(\vec{u}(\vec{x}), t) = 0$. Cette définition pour l'interface entraîne que l'on a:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)f = 0 \quad \forall (\vec{x}, t) \in \Gamma$$

Cette dernière équation dit simplement que la fonction est constante le long des lignes de courant (une particule située sur Γ reste sur Γ). On généralise facilement cette idée à tout le domaine (une particule dans Ω_i reste dans Ω_i). Par conséquent, on peut définir une fonction qui satisfait cette équation aux dérivées partielles dans tout Ω (voir [6, 24]). On définit donc la fonction de pseudo-concentration comme étant solution de:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)f = 0 \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (6.4)$$

avec une condition initiale et une condition frontière appropriées pour f .

Si on s'intéresse aux forces en présence sur l'interface séparant deux fluides immiscibles, on doit tenir compte du phénomène de tension superficielle. C'est ce que résume la seconde condition, qui assure l'équilibre des forces le long de l'interface et qui est donnée par:

$$\sigma_0 \cdot \vec{n} - \sigma_1 \cdot \vec{n} = \frac{C}{R} \vec{n} \quad \forall \vec{x} \in \Gamma \quad (6.5)$$

où C représente le coefficient de tension superficielle, R est le rayon de courbure de l'interface et \vec{n} est un choix de vecteur normal à Γ en \vec{x} . Ici R est une courbure signée qui dépend de l'ordre de la soustraction dans (6.5). En règle générale, si $(C/R)\vec{n}$ pointe vers le côté "concave" de l'interface (vers le centre du rayon de courbure), alors on soustrait la discontinuité de σ de "l'extérieur" (côté "convexe") de l'interface vers "l'intérieur" (côté "concave"). On remarque aussi que les forces dues à la tension superficielle s'annulent en un point "d'inflexion" (surface localement plane, $R = \infty$). Dans ce cas, seules les forces internes à chaque fluide demeurent et s'équilibrent entre elles. Pour plus de détails concernant la modélisation du phénomène de tension superficielle on réfère le lecteur à [4, 62, 46].

6.1.3 Formulation variationnelle

Il est facile de vérifier que la fonction définie par:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega_0 \text{ (fluide 0)} \\ 1 & \text{dans } \Omega_1 \text{ (fluide 1)} \end{cases}$$

satisfait (6.4) si on choisit comme condition frontière:

$$f = \begin{cases} 0 & \text{sur la partie de } \partial\Omega^- \text{ mouillée par le fluide 0.} \\ 1 & \text{sur la partie de } \partial\Omega^- \text{ mouillée par le fluide 1.} \end{cases}$$

Utilisant cette fonction de pseudo-concentration f on définit par exemple pour deux fluides newtoniens:

$$\eta(f) = \eta_0 + (\eta_1 - \eta_0)f$$

Pour les autres cas, ce sont les constantes rhéologiques de chaque fluide qui satisfont une équation identique à celle donnée pour la viscosité dans le cas newtonien. On a par exemple pour les deux modèles non newtoniens classiques:

(a) modèle loi de puissance:

$$\eta(f, |\dot{\gamma}(\vec{u})|) = \eta^*(f) |\dot{\gamma}(\vec{u})|^{n(f)-1} . \quad (6.6)$$

(b) modèle de Carreau:

$$\eta(f, |\dot{\gamma}(\vec{u})|) = \eta^*(f) \left(1 + t^2(f) |\dot{\gamma}(\vec{u})|^2 \right)^{\frac{n(f)-1}{2}} \quad (6.7)$$

où:

$$\begin{aligned} \eta^*(f) &= \eta_0^* + (\eta_1^* - \eta_0^*)f \\ t(f) &= t_0 + (t_1 - t_0)f \\ n(f) &= n_0 + (n_1 - n_0)f \end{aligned} \quad (6.8)$$

Les paramètres η^* , t et n sont des constantes rhéologiques différentes pour chaque fluide, qui sont déterminées de façon expérimentale. Il faut ici faire une distinction entre η_p^* , η_c^* , n_p et n_c , les indices étant évidemment p pour la loi de puissance et c pour la loi de Carreau. L'accumulation d'indices nous a incité à les laisser tomber. Dans le cas viscoélastique on a de plus que $\lambda(f) = \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_0)f$ et une relation similaire pour tous les paramètres du modèle PTT.

On récapitule en disant qu'il faut en général résoudre le système d'équations suivant:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{Id}) + \vec{s} = 0 & \forall \vec{x} \in \Omega(f) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 & \forall \vec{x} \in \Omega(f) \\ \left(1 + \frac{\lambda(f)\epsilon(f)}{\eta(f)} \text{tr}(\boldsymbol{\tau})\right) \boldsymbol{\tau} + \lambda(f) \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = 2\eta(f \cdot |\dot{\gamma}(\vec{u})|) \dot{\gamma}(\vec{u}) & \forall \vec{x} \in \Omega(f) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla f = 0 & \forall \vec{x} \in \Omega(f) \end{array} \right. \quad (6.9)$$

avec les conditions frontières appropriées en \vec{u} , $\boldsymbol{\tau}$, f et la condition (6.5) sur Γ . Pour $\boldsymbol{\tau}$, le choix des paramètres intervenant dans l'équation de comportement de chaque fluide est fonction du sous-domaine Ω_i par l'entremise de la fonction f . On remarque que cette façon d'écrire les équations fait ressortir que la détermination de f est liée à une modélisation non linéaire et qu'en fait on a un problème de frontières libres puisque on a utilisé la notation $\Omega(f)$.

Considérons premièrement l'équation de la conservation du mouvement (6.9). En multipliant par \vec{v} , en intégrant par parties et en utilisant la condition naturelle (6.5), on obtient:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} : \dot{\gamma}(\vec{v}) - p \nabla \cdot \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} \vec{s} \cdot \vec{v} d\vec{x} + \int_{\Gamma} \frac{C}{R} \vec{n} \cdot \vec{v} ds \quad (6.10)$$

Dans le membre de droite le terme de tension superficielle pose deux problèmes. Premièrement, on doit évaluer cette intégrale le long de Γ . Deuxièmement, la courbure R dépend aussi de l'interface Γ . Dans les deux cas, l'évaluation des quantités

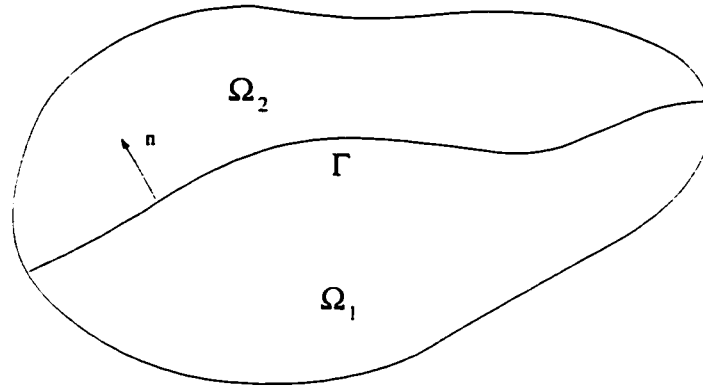


Figure 6.1 *Domaine Ω coupé en deux sous-domaines Ω_1 et Ω_2 par l'interface Γ .*

mentionnées est ardue à cause de l'indétermination de f et du caractère implicite de l'interface Γ (sous-produit de la fonction de pseudo-concentration f). Cependant, si l'interface Γ est assez régulière on a au sens des distributions:

$$\nabla f = [[f]]\delta_\Gamma \vec{n} \quad \forall \vec{x} \in \Omega \quad (6.11)$$

Cette équation est satisfaite dans tout Ω . Dans cette relation, $[[f]]$ désigne le saut de la variable f au travers de l'interface et pris dans la direction opposée à celle de la normale (dans notre cas on a $[[f]] = \pm 1$). Le terme δ_Γ désigne une simple couche sur l'interface Γ , notion qui généralise à une surface la distribution de Dirac.

En effet, par définition on a:

$$\langle \nabla f, \vec{\varphi} \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2} = -\langle f, \nabla \cdot \vec{\varphi} \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2}$$

En se référant à la figure 6.1 on a que

$$-\int_{\Omega_1} f \nabla \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} = \int_{\Omega_1} \nabla f \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_1} f \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_1 ds$$

et:

$$-\int_{\Omega_2} f \nabla \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} = \int_{\Omega_2} \nabla f \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} - \int_{\partial\Omega_2} f \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_2 ds$$

On obtient donc:

$$\langle \nabla f \cdot \vec{\varphi} \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2} = \int_{\Omega} \nabla f|_{L^2(\Omega)} \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} - \int_{\Gamma} (f_1 - f_2) \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_1 ds$$

mais puisque:

$$\int_{\Omega} \nabla f|_{L^2(\Omega)} \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla f \cdot \vec{\varphi} d\vec{x} = 0$$

pour la fonction de pseudo-concentration f , on a finalement

$$\langle \nabla f \cdot \vec{\varphi} \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2} = \int_{\Gamma} (f_2 - f_1) \vec{\varphi} \cdot \vec{n}_1 ds \stackrel{\text{def}}{=} \langle [[f]] \delta_{\Gamma} \vec{n} \cdot \vec{\varphi} \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2}$$

ce qui est identique à (6.11).

Les équations de conservation du mouvement et de la masse deviennent:

$$\int_{\Omega} (\tau : \dot{\gamma}(\vec{v}) - p \nabla \cdot \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} \left(\vec{s} + C \frac{\nabla f}{R} \right) \cdot \vec{v} d\vec{x} \quad \forall \vec{v} \in V \quad (6.12)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} d\vec{x} = 0 \quad \forall q \in Q \quad (6.13)$$

où V et Q sont des espaces de Sobolev appropriés.

L'équation de transport est résolue suivant l'une des méthodes du chapitre précédent. Il pourrait en être de même pour l'équation de comportement mais on se contentera d'utiliser la méthode de Lesaint-Raviart classique pour résoudre (6.3). On remarque qu'il n'est plus possible d'obtenir la formulation faible du problème de Stokes sous sa forme habituelle. En effet, on ne peut plus définir la forme bilinéaire coercive classique puisqu'on a τ au lieu de $2\eta\dot{\gamma}(\vec{u})$ dans le membre de gauche de (6.12). Pour remédier à ce problème, Fortin-Zine-Agassant [25] utilisent un changement de variable qui permet d'introduire un terme visqueux dans l'équation de mouvement et ainsi récupérer la forme classique de la formulation mixte du problème de Stokes. Cependant, il est encore assez difficile de trouver des discrétisations compatibles des variables \vec{u} , p et τ . En effet, ces discrétisations doivent vérifier

une généralisation de la condition de Brezzi (voir Brezzi-Fortin[5]. Pour contourner partiellement cette difficulté, Fortin-Guénette-Pierre (voir [27, 31]) dans une série d'articles proposent d'introduire explicitement la variable $\mathbf{d} = \dot{\gamma}(\bar{\mathbf{u}})$. L'introduction de cette nouvelle variable rend plus aisée la recherche de discrétisations compatibles et on doit résoudre le système d'équations aux dérivées partielles suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\bar{\mathbf{u}}, p, f, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{d}) \in V \times Q \times \mathcal{G} \times \Sigma \times D \text{ tel que:} \\ \int_{\Omega} 2\alpha \dot{\gamma}(\bar{\mathbf{u}}) : \dot{\gamma}(\bar{\mathbf{v}}) - p \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\bar{\mathbf{x}} = - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - 2\alpha \mathbf{d}) : \dot{\gamma}(\bar{\mathbf{v}}) \, d\bar{\mathbf{x}} \\ \quad + \int_{\Omega} \frac{C}{R} \nabla f \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\bar{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\bar{\mathbf{x}} \quad \forall \bar{\mathbf{v}} \in V, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} \, d\bar{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall q \in Q, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) g \, d\bar{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla f) g \, d\bar{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega^-} f g (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \, ds = \\ \quad - \int_{\partial\Omega^-} f^- g (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \, ds \quad \forall g \in \mathcal{G}, \\ \lambda(f) \left[\int_{\Omega} \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} : \boldsymbol{\sigma} \, d\bar{\mathbf{x}} - \int_{\partial\Omega^-} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \, ds \right] + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma} \, d\bar{\mathbf{x}} \\ \quad + \lambda(f) \left[\int_{\Omega} \frac{\epsilon(f)}{\eta_0(f)} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma} \, d\bar{\mathbf{x}} \right] = \int_{\Omega} 2\eta_0(f) \dot{\gamma}(\bar{\mathbf{u}}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\bar{\mathbf{x}} \\ \quad - \lambda(f) \left[\int_{\partial\Omega^-} \boldsymbol{\tau}^- : \boldsymbol{\sigma} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \, ds \right] \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma, \\ \int_K \mathbf{d} : \mathbf{c} \, d\bar{\mathbf{x}} = \int_K \dot{\gamma}(\bar{\mathbf{u}}) : \mathbf{c} \, d\bar{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{c} \in D. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

Le problème de Stokes considéré sous sa forme mixte, l'équation de transport, l'équation de comportement et l'équation du tenseur \mathbf{d} sont résolues séparément par une formulation en correction. Finalement, on utilise la méthode GMRES (voir par exemple Fortin-Zine-Agassant [25]) pour recoupler les sous-problèmes. Ceci fait

Tableau 6.1 Liste des discrétisations

Variable	Discrétisation
\vec{u}	$(Q_2^9)^2 - C^0$
p	$P_1 - C^{-1}$
τ	$(Q_2^8)^4 - C^{-1}$
d	$(Q_2^8)^4 - C^{-1}$ où C^0
f	$Q_2^8 - C^{-1}$

exception pour le moulage par injection où on calcule chaque solution f à un temps donné en utilisant la solution du problème de Stokes comme champ de vecteurs avec la fonction de pseudo-concentration au temps précédent. Plus de détails seront donnés dans les sections correspondantes des résultats numériques.

Enfin, quelques précautions doivent être prises en ce qui concerne la discrétisation des différentes variables. Dans cette thèse, seuls les éléments quadrangulaires ont été utilisés. Voici les discrétisations correspondantes: La notation utilisée dans cette table indique que pour la vitesse, un quadrilatère à 9 noeuds a été utilisé pour la vitesse. Par contre, la pression est linéaire par élément et discontinue d'un élément à l'autre. Les tenseurs τ et D sont symétriques et discrétisés à l'aide de quadrilatères à 8 noeuds (Q_2 incomplet). Le même espace est utilisé pour la pseudo-concentration f . Les 4 dernières variables sont donc discontinues à la frontière des éléments.

L'algorithme suivant (qui borne numériquement la solution dans $[0, 1]$) est utilisé pour résoudre l'équation de transport (voir Fortin-Glowinski [26]):

- étant donnés $\bar{\lambda}_1$ et $\bar{\beta}_1$,
- Boucle sur $\|\bar{\lambda}_{k+1} - \bar{\lambda}_k\| \geq \epsilon$

- Boucle sur $\|f_i^n - f_{i-1}^n\| \geq \epsilon$ et $\|\vec{\beta}_i - \vec{\beta}_{i-1}\| \geq \epsilon$
- Résoudre le système linéaire pour f_i^n :

$$\int_K \left(\frac{3f_i^n - 4f_i^{n-1} + f_i^{n-2}}{2\Delta t} \right) g + \vec{u} \cdot \nabla f_i^n g \, dx - \int_{\partial K^-} \vec{u} \cdot \vec{n}_K f_i^n g \, ds$$

$$+ r \int_K (2f_i^n - 1) g \, dx = - \int_{\partial K^-} \vec{u} \cdot \vec{n}_K (f_i^{n-1}) g \, ds$$

$$+ r \int_K (-\beta_1^i + \beta_2^i) g \, dx - \int_K (-\lambda_k^1 + \lambda_k^2) g \, dx$$

- Mise à jour de $\vec{\beta}$:

$$\beta_{i+1}^1 = \min\{0, -f_i^n + \lambda_k^1/r\}$$

$$\beta_{i+1}^2 = \min\{0, f_i^n - 1 + \lambda_k^2/r\}$$

- Fin boucle

- Mise à jour de $\vec{\lambda}$:

$$\lambda_{k+1}^1 = \lambda_k + \rho(-f_i^n - \beta_i^1)$$

$$\lambda_{k+1}^2 = \lambda_k + \rho(f_i^n - 1 - \beta_i^2).$$

- Fin boucle

On remarque que l'algorithme n'est pas donné sous la forme de correction afin de ne pas ajouter des termes inutiles dans la description ci-haut qui est déjà assez chargée. De plus, la règle du trapèze est utilisée pour l'évaluation numérique des intégrales reliées à la contrainte $f \in [0, 1]$ sur chaque K . Ceci permet d'obtenir des points de contrôle (pour forcer numériquement $f(x, y) \in [0, 1]$) sur la frontière ∂K , ce qui n'est pas le cas si on choisit la quadrature de Gauss classiquement utilisée en éléments finis. De plus, la frontière entrante doit être particulièrement bien contrôlée en vertu de ce qui a été dit dans les chapitres précédents. L'avantage de ce schéma

est qu'on a plus à chercher les paramètres élémentaires optimaux liés aux autres méthodes. En effet, puisque ce schéma est très robuste avec $\rho = r$, on n'a pas à chercher l'ajustement parfait, la solution étant la même pour un grand intervalle de valeurs de r . En fait, le paramètre r n'influence que le taux de convergence de la méthode, ce qui n'est pas négligeable mais moins problématique. On conclut en disant que pour le schéma de Lesaint-Raviart, des oscillations de l'ordre de 0.25 apparaissent le long de l'interface Γ puisque dans ce cas des discontinuités pour f^{-n} existent sur certains ∂K^- (surtout près de $\partial\Omega^-$). La "projection" réduit ces oscillations à environ 10^{-3} pour une quadrature trapézoïdale de $\bar{\tau}$ par $\bar{\tau}$ points dans K , une erreur sur les points de contrôle de 10^{-3} , un critère d'arrêt pour ALG2 de $\epsilon = 10^{-3}$ et un choix "optimal" de $r \in [1, 10^3]$.

6.2 Coextrusion

Le but de cette section est de valider les méthodes discutées au chapitre précédent. Dans un premier temps, on présentera les résultats obtenus pour un problème de coextrusion "simple" et cela pour la majorité des méthodes proposées au chapitre précédent. Dans un second temps, on utilise la méthode la plus "autonome" pour résoudre des écoulements plus complexes tels la coextrusion de deux fluides non newtoniens et viscoélastiques. Finalement, on confronte la méthode avec des résultats récemment obtenus dans [18, 17] pour la coextrusion de deux fluides viscoélastiques dans une géométrie en T.

6.2.1 Le cas newtonien: résultats pour les différentes méthodes

Cette section fait une brève étude comparative des résultats numériques obtenus pour la majorité des méthodes décrites au chapitre précédent. Un test simple de coextrusion de deux fluides newtoniens a été choisi pour les différentes méthodes. Le

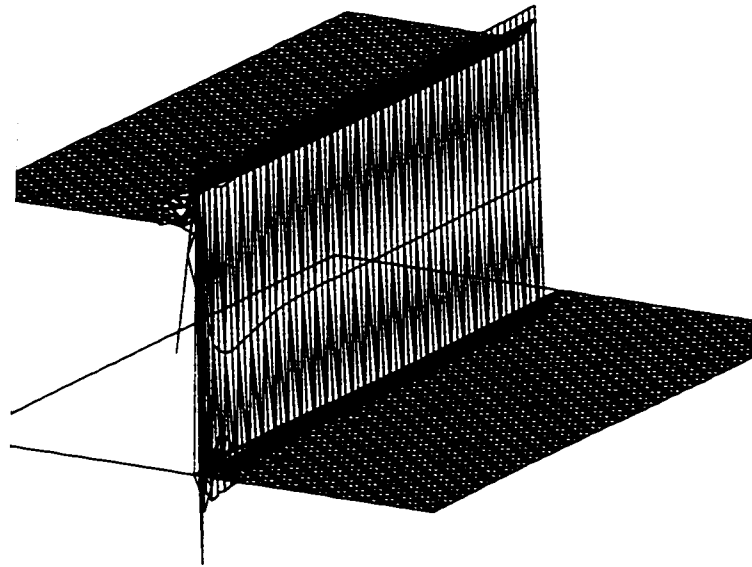


Figure 6.2 *Méthode de Lesaint-Raviart originale.*

fluide du bas a une viscosité de $\eta_0 = 10.0$ et celui du haut de $\eta_0 = 1.0$. Pour les deux fluides, les débits sont identiques et valent $Q = 0.417$. De plus, la géométrie utilisée est de 2 par 10 unités adimensionnelles et le fluide 0 mouille la partie entrante de $y = -1.0$ à $y = 0$ et le fluide 1 mouille le reste de la face entrante. Pour des fins de visualisation, on a contracté le maillage par un facteur 3 en x dans le post-processeur.

Évidemment les résultats pour la méthode de Lesaint-Raviart sont présentés en premier, puisqu'elle est à la base de toutes les autres méthodes construites. On remarque les oscillations caractéristiques que les méthodes classiques génèrent lorsqu'appliquées à ce type de problèmes. Les oscillations commencent à l'entrée, se stabilisent et sont transportées dans tout le domaine comme l'indique la figure 6.2. On observe que le problème majeur se produit en entrée où l'on distingue les plus grandes oscillations. Cela s'explique par la discontinuité présente dans la condition

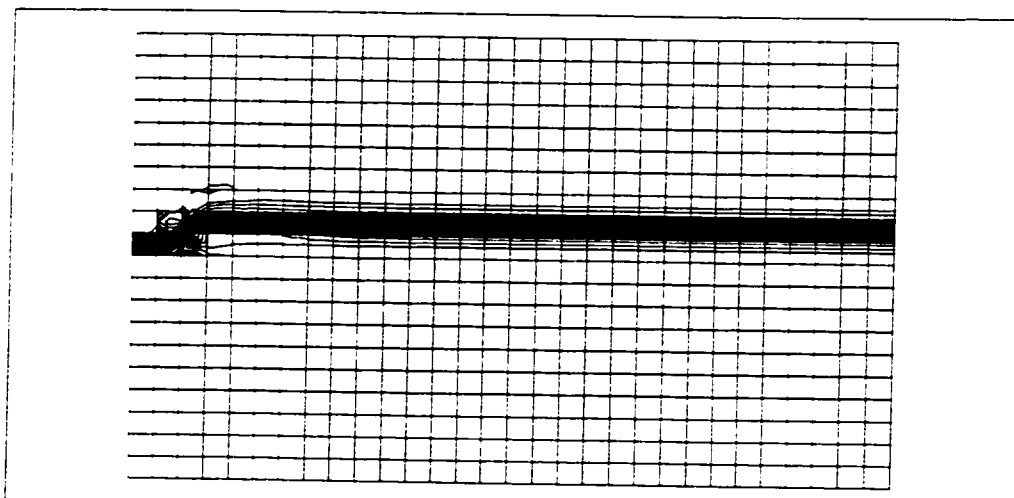


Figure 6.3 Lignes de niveau de la pseudo-concentration pour la méthode de Lesaint-Raviart originale.

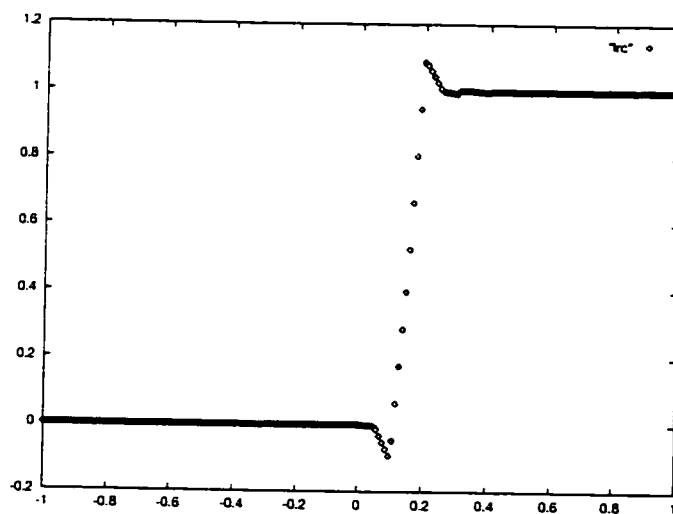


Figure 6.4 Coupe en sortie pour la méthode de Lesaint-Raviart originale.

frontière à cet endroit.

Pour remédier à ce problème on veut contrôler la condition frontière à l'entrée et la projeter sur un espace de fonctions non oscillatoires. Plusieurs approches ont été tentées comme par exemple une projection avec diffusion sur la frontière. Il est cependant extrêmement difficile de savoir comment ajuster les coefficients de diffusion élémentaire. Les généralisations des approches utilisées en différences finies sont à notre avis trop complexes en dimension supérieure à un. On mentionne cependant que des discontinuités aussi raides qu'en différences finies sont obtenues lorsque les projections TVD ou ENO sont utilisées conjointement avec la méthode de Lesaint-Raviart en dimension un. De plus, pour un choix de coefficients constants, la méthode était soit trop diffusive ou pas assez. On a donc omis ces résultats puisque d'une part, ils sont moins convaincants et d'autre part on présente plus loin une méthode de diffusion dans chaque élément qui est du même type mais avec un traitement contrôlé de la diffusion. Il semble donc plus approprié de présenter une méthode de projection dont la solution "ne dépend" d'aucun paramètre. On utilise la projection suivante sur chaque frontière ∂K^- :

- étant donné $\bar{\lambda}_1$ et $\bar{\beta}_1$,
- Boucle sur $\|\bar{\lambda}_{k+1} - \bar{\lambda}_k\| \geq \epsilon$
 - Boucle sur $\|f_i - f_{i-1}\| \geq \epsilon$ et $\|\bar{\beta}_i - \bar{\beta}_{i-1}\| \geq \epsilon$
 - Résoudre le système linéaire pour f_i^n :

$$\begin{aligned} \int_{\partial K^-} (1 + 2r) f_i g \vec{u} \cdot \vec{n}_K \, ds &= - \int_{\partial K^-} f_i^- g \vec{u} \cdot \vec{n}_K \, ds \\ &+ r \int_{\partial K^-} (1 - \beta_1^i + \beta_2^i) g \vec{u} \cdot \vec{n}_K \, ds - \int_{\partial K^-} (-\lambda_k^1 + \lambda_k^2) g \vec{u} \cdot \vec{n}_K \, ds \end{aligned}$$

– Mise à jour de $\tilde{\mathcal{J}}$:

$$\mathcal{J}_{i+1}^1 = \min\{0, -f_i + \lambda_k^1/r\}$$

$$\mathcal{J}_{i+1}^2 = \min\{0, f_i - 1 + \lambda_k^2/r\}$$

– Fin boucle

• Mise à jour de $\tilde{\lambda}$:

$$\lambda_{k+1}^1 = \lambda_k + \rho(-f_i - \mathcal{J}_i^1)$$

$$\lambda_{k+1}^2 = \lambda_k + \rho(f_i - 1 - \mathcal{J}_i^2).$$

• Fin boucle

-

En fait, la solution dépend de r et ρ mais pour $\rho = r$ et pour un large intervalle de valeurs de r la solution est la même, avec un taux de convergence plus ou moins rapide en fonction de r . Cependant, on remarque que pour des r trop grands l'algorithme écrase la solution à zéro partout. On note ici que cet algorithme est un hybride entre deux formes d'approximation. La solution f_i est de type éléments finis alors que les solutions de \mathcal{J}_i et λ_k sont obtenues de façon ponctuelle aux points de Gauss de la frontière ∂K^- . Cette approche a l'avantage d'être facile à programmer, mais n'exclut pas la création d'oscillations sur les extrémités de ∂K^- (la quadrature de Gauss utilise des points intérieurs). De plus, comme mentionné au chapitre 4, la solution restreinte à la frontière et le transport sont en général non exacts et des oscillations sont tout de même générées (surtout à l'entrée du domaine, où on trouve une discontinuité). Finalement, en observant la figure 6.5 on conclut à une amélioration générale de l'algorithme de Lesaint-Raviart. On mentionne le fait important que cet algorithme a un "caractère autonome". On sait que le transport d'une fonction f très régulière peut dégénérer en une fonction discontinue ou à fort gradient si le champ de vecteurs se concentre en un point donné du maillage. Ce schéma détectera l'anomalie et agira en conséquence, c'est ce que l'on entend par

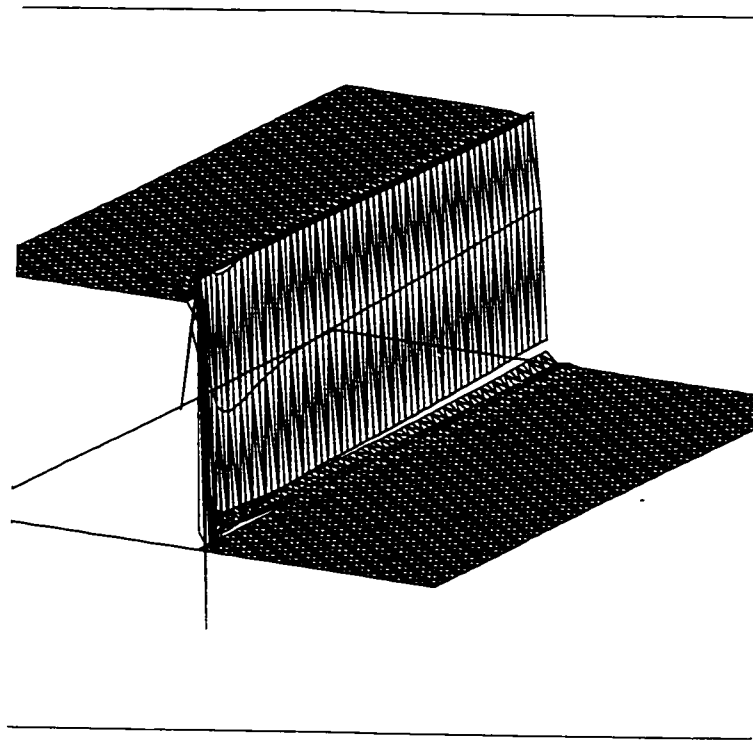


Figure 6.5 *Méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur ∂K .*

“caractère autonome”. En fait, des tests ont été effectués pour une projection de la condition au bord et une résolution par Lesaint-Raviart pour f et ont donné des résultats pratiquement non oscillatoires, mais on a perdu ce “caractère autonome”. On se contente donc de présenter des méthodes à “caractère autonome”.

Dans le même ordre d'idées, on présente la méthode de Lesaint-Raviart avec la projection de la solution f dans l'intervalle $[0, 1]$ sur tout l'élément K . C'est la méthode dite bornée. On trouve avec cette méthode d'excellents résultats comme en témoigne le graphique de la pseudo-concentration à la figure 6.8, les lignes de niveau de la pseudo-concentration à la figure 6.9 et la coupe en sortie à la figure 6.10. Le maximum de la pseudo-concentration est en général de l'ordre du critère d'arrêt utilisé dans l'algorithme ci-haut.

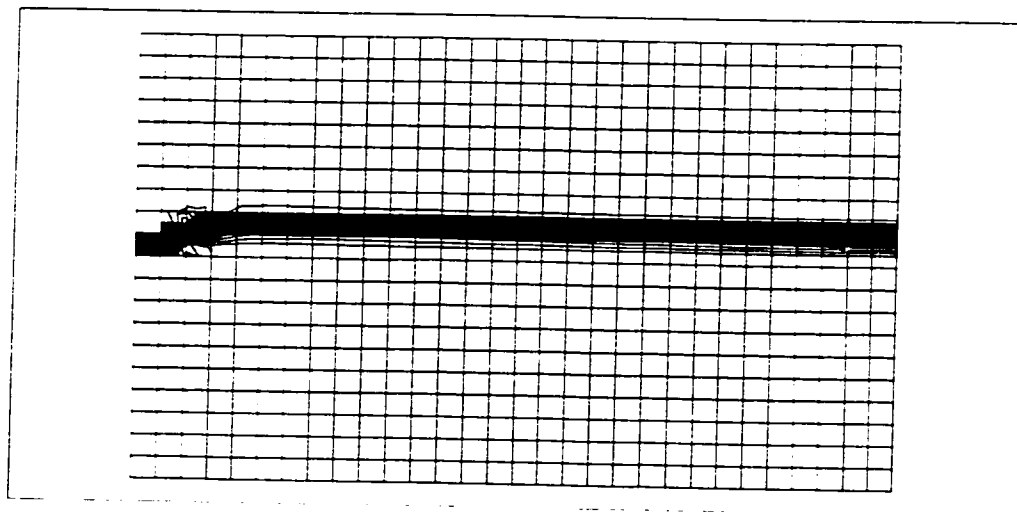


Figure 6.6 Lignes de niveau de f pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur ∂K .

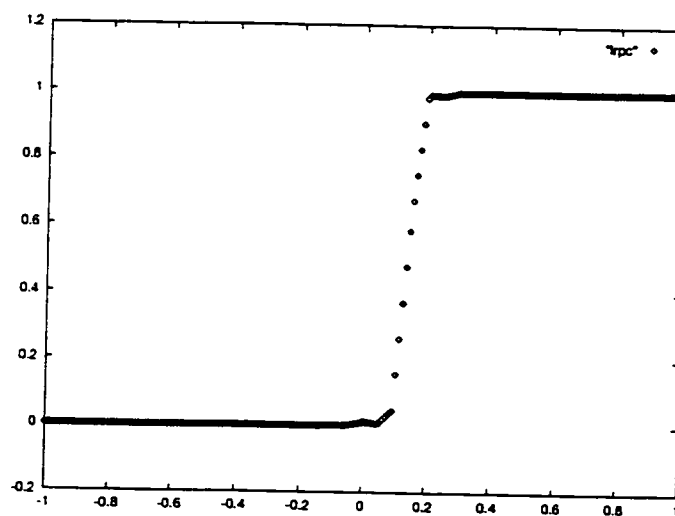


Figure 6.7 Coupe en sortie pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur ∂K .

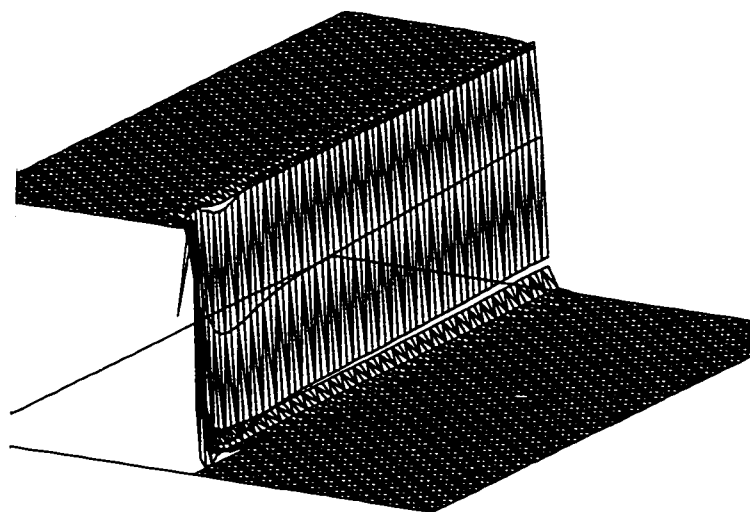


Figure 6.8 *Méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K .*

On choisit de parler ici de l'importance des critères mentionnés à la fin du chapitre 4 puisque c'est la méthode que l'on utilisera pour les résultats numériques des autres sections. En effet, on remarque sur la figure 6.8 que l'on a obtenu à l'entrée du domaine une solution dont la restriction sur ∂K^- pour l'élément contenant la discontinuité de la forme illustré à la figure 6.11.

On mentionne tout simplement que des tentatives pour remédier à ce défaut majeur ont vu le jour mais une méthode offrant une simplicité de programmation est toujours manquante. Les autres approches utilisées se sont transformées en des cauchemars algorithmiques.

On tente maintenant de stabiliser la méthode en utilisant une formulation qu'on sait moins oscillatoire que la méthode de Lesaint-Raviart. Les propriétés

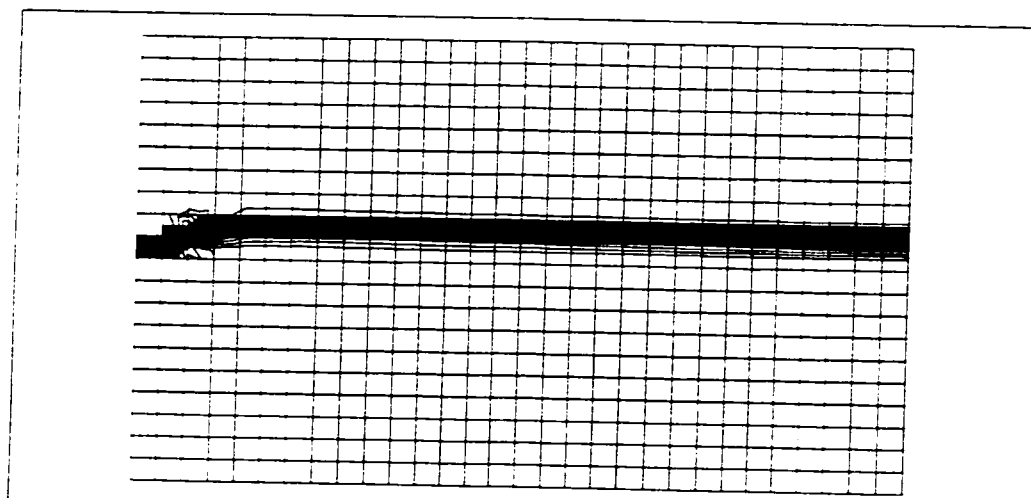


Figure 6.9 *Méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K .*

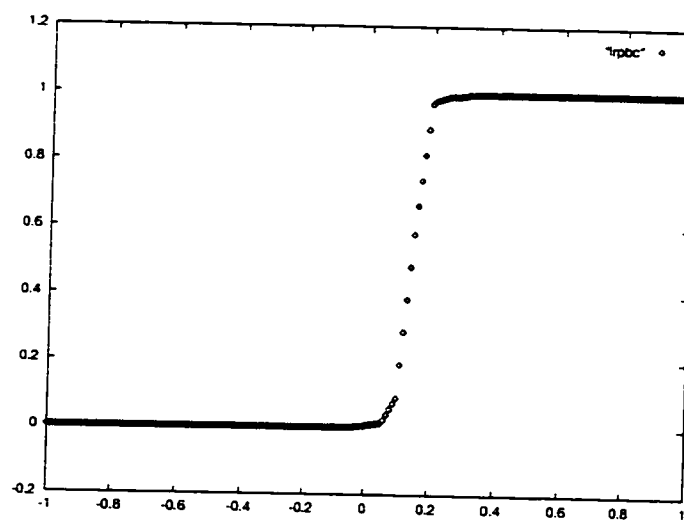


Figure 6.10 *Coupe en sortie pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K .*

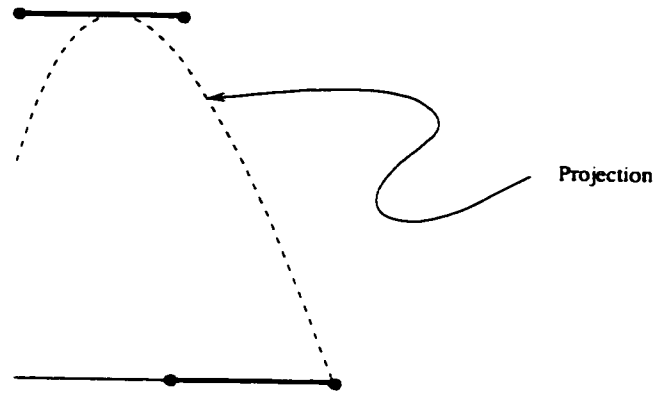


Figure 6.11 *Projection qui ne conserve pas la monotonie (la masse ?).*

de stabilisation de la méthode SUPG sont relativement bien connues. Cependant comme on l'a mentionné à plusieurs reprises dans les chapitres précédents, cette méthode n'est pas à notre sens une méthode upwind. Pour soutenir cette affirmation on mentionne que la méthode SUPG solutionne dans le cas continu le problème qui suit sur chaque élément:

$$\begin{cases} -d_K \nabla \cdot [(\vec{u} \otimes \vec{u}) \nabla f] + \vec{u} \cdot \nabla f = 0 & \text{dans } K \\ -d_K \vec{u} \cdot \nabla f + (1 + d_K) f = (1 + d_K) f^- & \text{sur } \partial K^- \\ -d_K \vec{u} \cdot \nabla f = 0 & \text{sur } \partial K^+ \end{cases}$$

On remarque que c'est une forme de stabilisation du problème initial. En effet, Pour des d_K variant entre 0 et ∞ , on a une pondération entre le problème initial et le problème suivant:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u} \nabla f) = 0 & \text{dans } K \\ -\vec{u} \cdot \nabla f + f = f^- & \text{sur } \partial K^- \\ \vec{u} \cdot \nabla f = 0 & \text{sur } \partial K^+ \end{cases} \quad (6.15)$$

Les raisonnements ci-haut ne s'appliquent plus dans le cas discret comme on l'a entrevu au chapitre 4 dans le cadre de la méthode de Lesaint-Raviart. Les figures

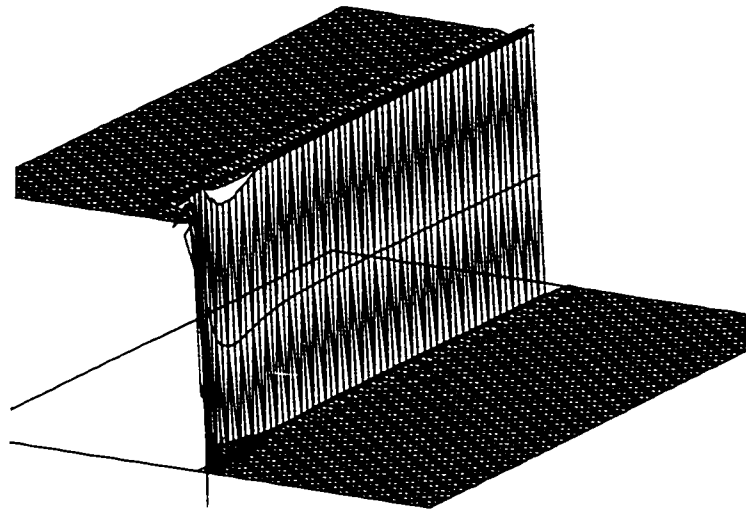


Figure 6.12 *Méthode SUPG par élément.*

6.12. 6.13 et 6.14 démontrent bien cet effet stabilisateur qui dans le cas discret est possiblement dû aux termes supplémentaires dans les conditions frontières de 6.15. On comprend que la méthode de Lesaint-Raviart en plus de ne pas assurer le transport exact dans K n'utilise aucune information supplémentaire à la frontière entrante ∂K^- . Il est donc clair que de forcer $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$ sur les frontières nous rapproche plus des solutions dans $\text{Ker} B$ (voir Perrochet-Aziérad [56]). On ajoute que des valeurs jusqu'à $d_K = 10^{40}$ ont été testées sans affecter la solution obtenue pour des d_K plus raisonnables. Il est évident que plus d_K sera petit plus la solution tend vers la solution de Lesaint-Raviart. Il semble donc inutile de présenter les cas intermédiaires.

On veut maintenant, de la même façon que l'on a régularisé la frontière entrante pour la méthode de Lesaint-Raviart, régulariser cette méthode SUPG par élément.

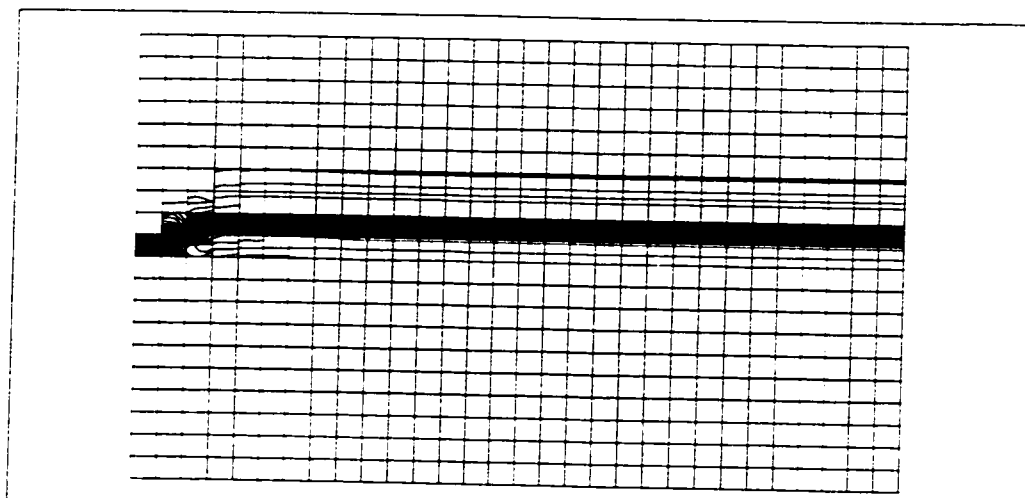


Figure 6.13 *Méthode SUPG par élément.*

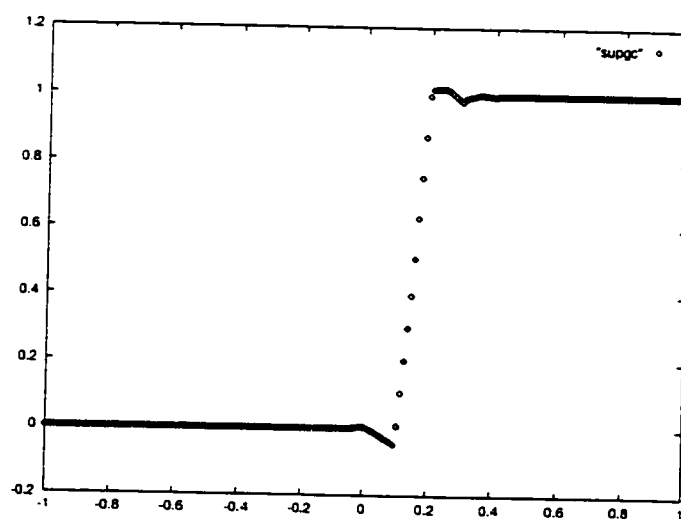


Figure 6.14 *Coupe en sortie pour la méthode SUPG par élément.*

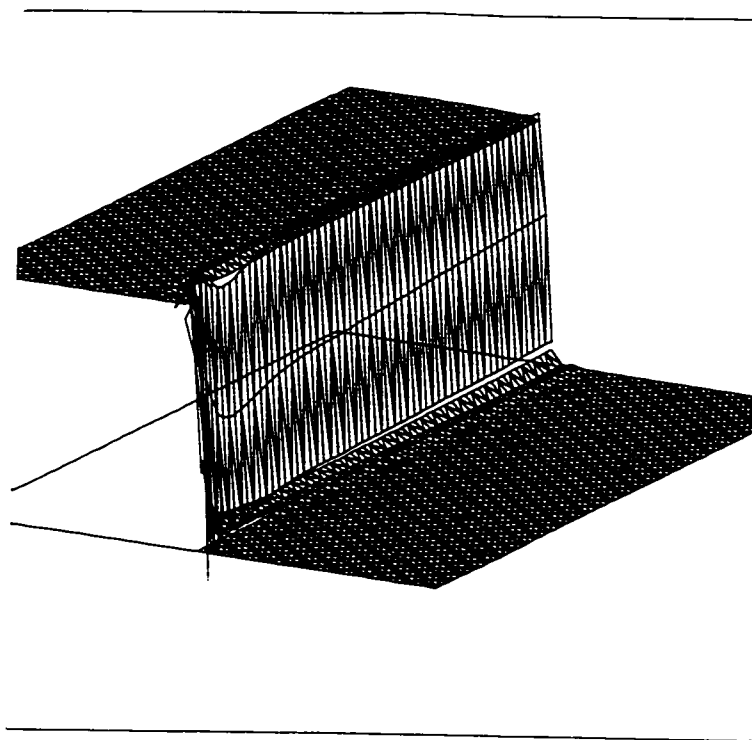


Figure 6.15 *Méthode SUPG par élément avec projection bornée sur ∂K .*

On gardera en tête la remarque faite au sujet de la projection donnée à la figure 6.11.

Comme prévu cette projection améliore la régularité de la solution pour la méthode DSUPG qui elle était déjà plus stable que la méthode de Lesaint-Raviart originale.

Cette prochaine méthode se veut une reproduction de l'approche ENO (comme étant un ajout de diffusion locale). Ce programme comme on l'a mentionné plus haut est difficile puisque le choix de la diffusion locale d_K n'est pas aussi aisé qu'en dimension 1. Cependant, dans l'esprit de ces méthodes, on a tenté de se rapprocher du concept ENO. On renvoie le lecteur à l'article de Harten [34] pour les détails de l'approche ENO. On a donc formé un détecteur d'irrégularités de la façon suivante: puisqu'on sait que notre solution doit être entre 0 et 1, on vérifie si le gradient de la

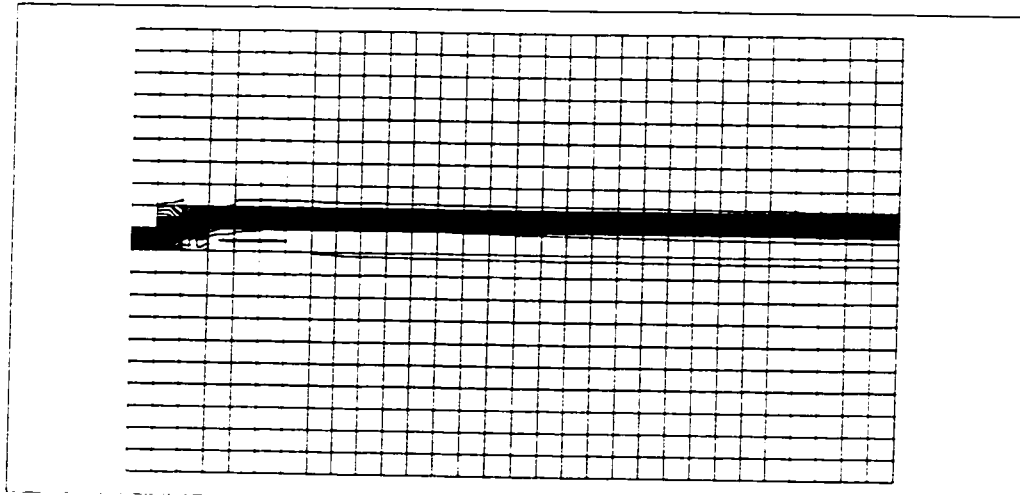


Figure 6.16 Méthode SUPG par élément avec projection bornée sur ∂K .

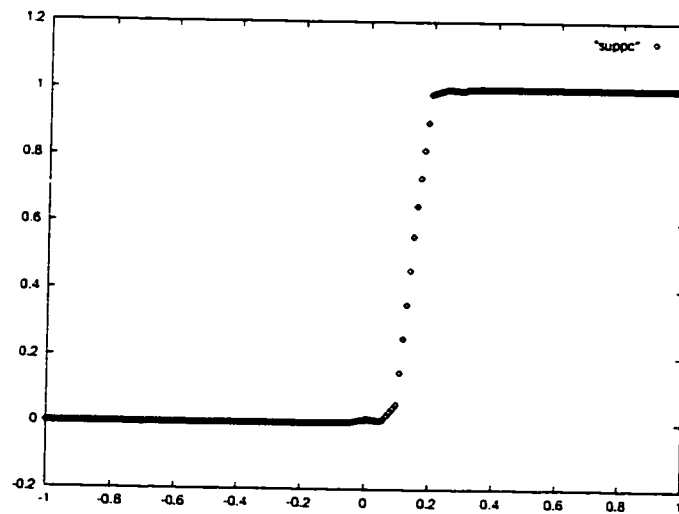


Figure 6.17 Coupe en sortie pour la méthode SUPG par élément avec projection bornée sur ∂K .

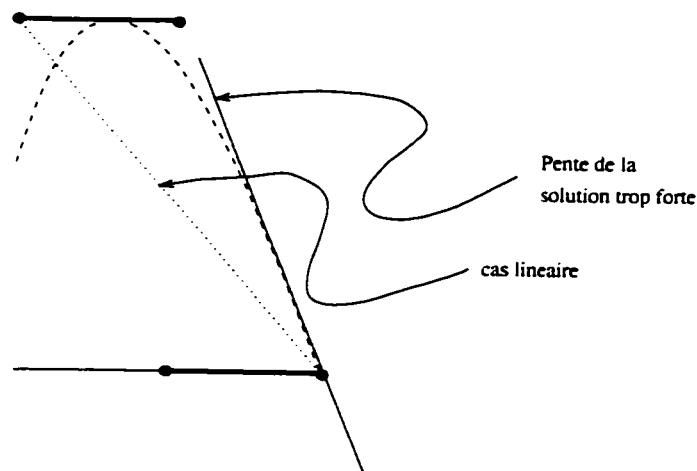


Figure 6.18 *Illustration géométrique en dimension un du détecteur d'irrégularités.*

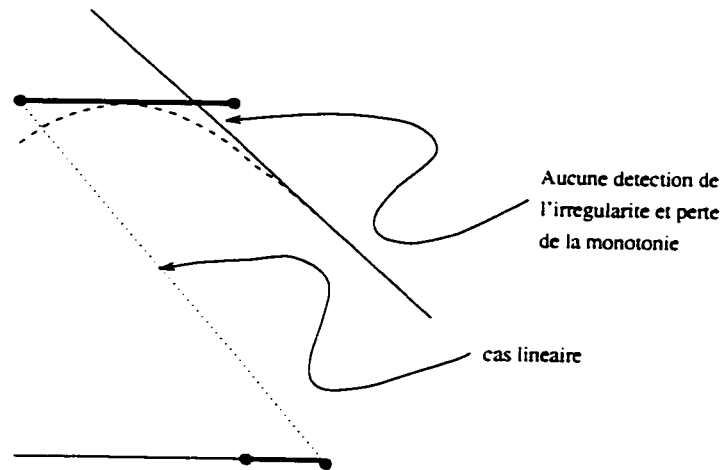


Figure 6.19 *Faute du détecteur d'irrégularités.*

solution s'éloigne trop de la dérivée maximale pour un plan dans K . Si c'est le cas, on introduit une diffusion perpendiculaire à l'écoulement en posant $\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}}^\perp \otimes \bar{\mathbf{u}}^\perp$ (une forme de capture de discontinuité, voir [39]) dans la formulation 5.1. Ceci se traduit par la figure (6.18) et (6.19).

Les figures 6.20, 6.21 et 6.22 montrent que si l'on utilise une diffusion trop forte et sans détecteur d'irrégularités on a évidemment un schéma trop diffusif. Par contre, en utilisant le détecteur d'irrégularités mentionné avec une diffusion de l'ordre de

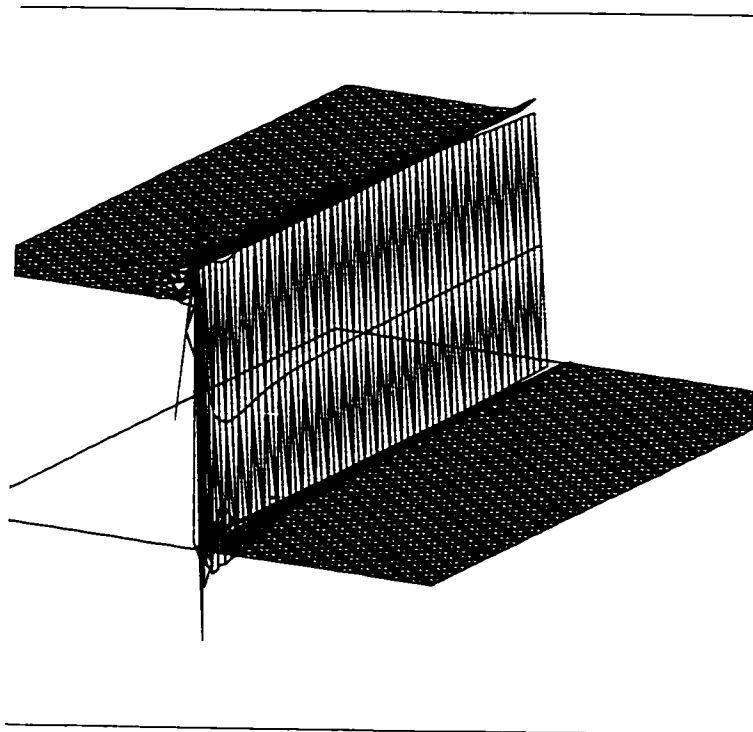


Figure 6.20 *Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$.*

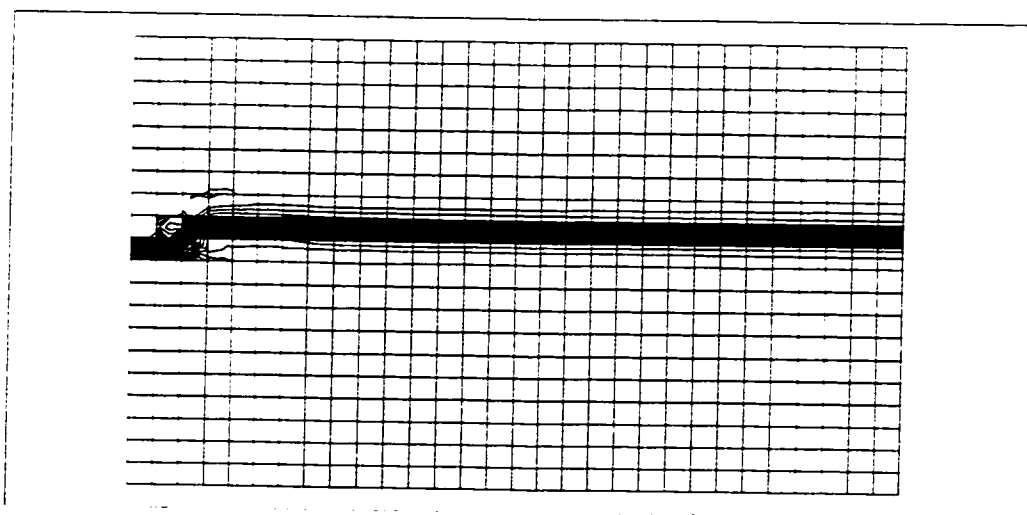


Figure 6.21 *Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$.*

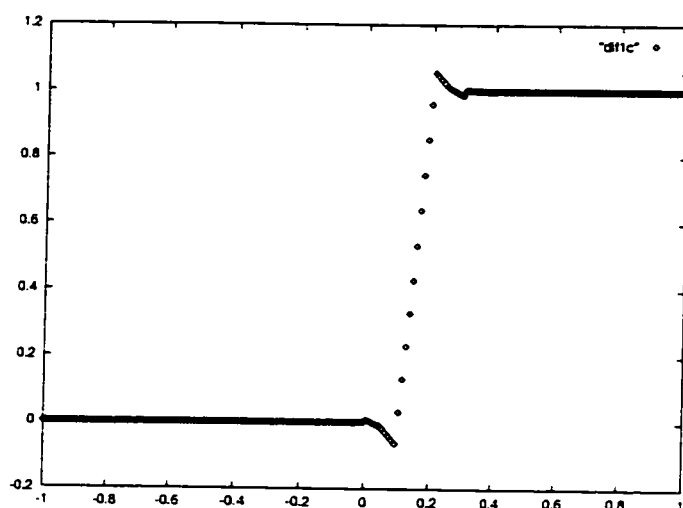


Figure 6.22 Coupe en sortie pour la méthode de diffusion orthogonale par élément. $d_K = 10^{-8}$.

$d_K = 10^{-6}$ pondérée par la norme du gradient (dans le but d'ajouter plus de diffusion là où la solution est très irrégulière) on obtient une solution plus acceptable. On observera les figures 6.23 et 6.24 pour s'en convaincre. On remarque immédiatement que ce détecteur d'irrégularités est incomplet puisqu'il ne tient pas compte des cas du type présenté à la figure (6.19). Le but recherché est en fait d'obtenir une solution se situant entre les deux solutions obtenues. Il reste donc du travail pour la recherche d'un détecteur d'irrégularités efficace mais les résultats obtenus sont tout de même encourageants et on espère pouvoir s'affranchir de cette tâche dans le futur.

Cette approche pour reproduire les idées ENO souffre d'un défaut majeur (même si on avait un détecteur d'irrégularités efficace). En effet, on sait que la méthode de Lesaint-Raviart ne donne pas une solution à transport exact dans le cas général. Il serait donc presque inconcevable que la solution du schéma présenté ci-haut en donne une.

Pour remédier à ce problème on utilise la formulation mixte qui elle assure

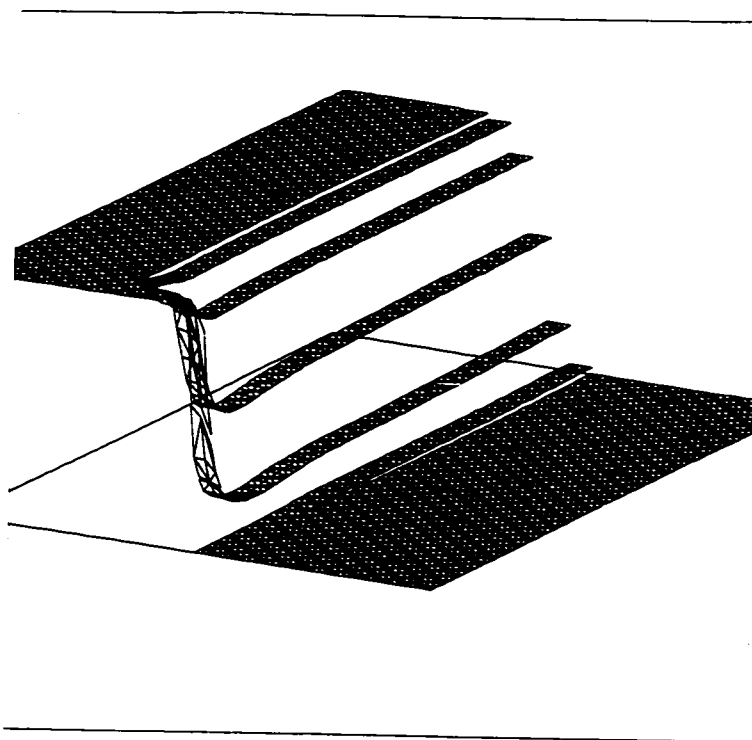


Figure 6.23 *Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-3}$.*

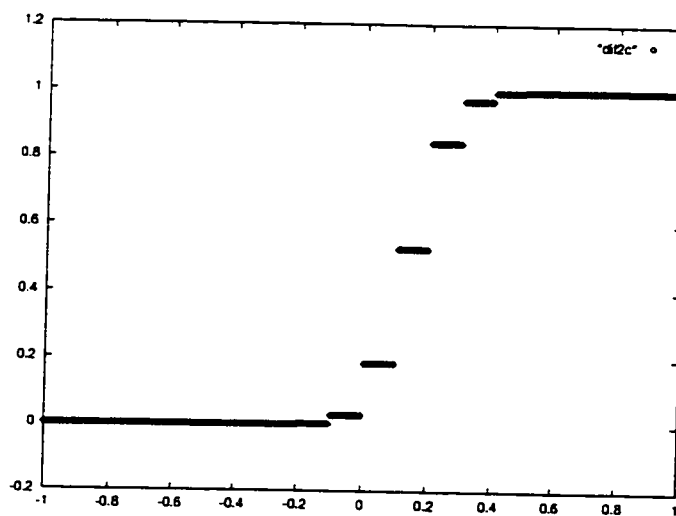


Figure 6.24 *Coupe en sortie pour la méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-3}$.*

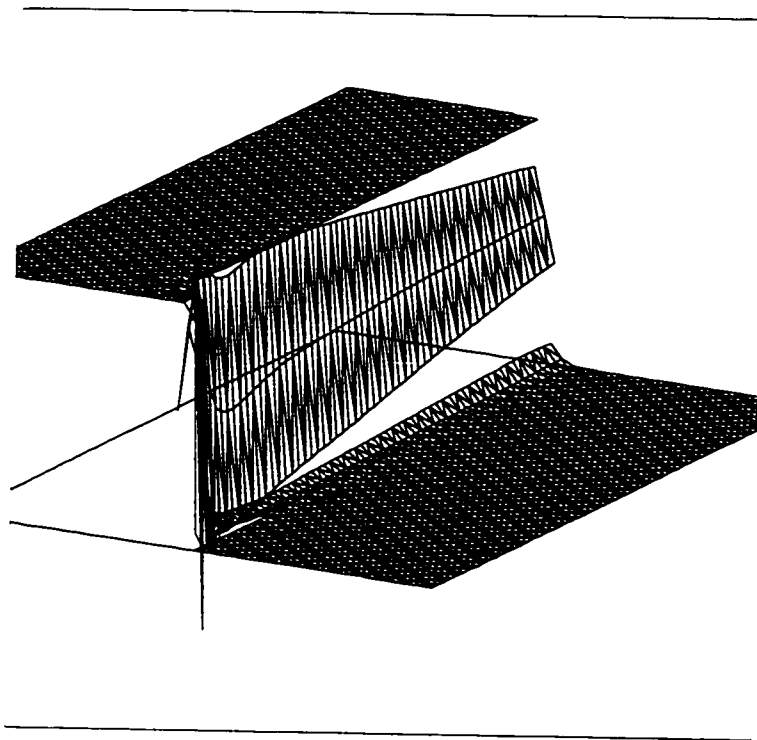


Figure 6.25 Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$ et projection bornée sur ∂K .

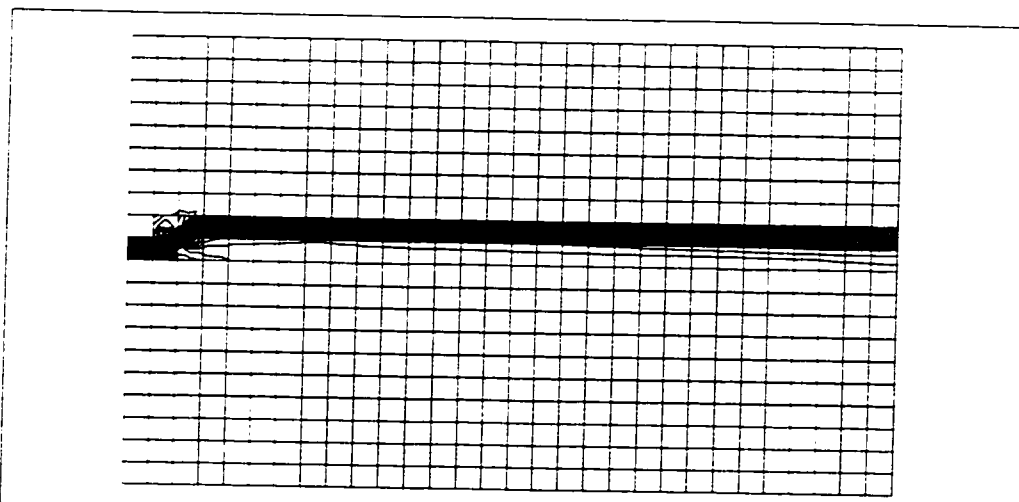


Figure 6.26 Méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$ et projection bornée sur ∂K .

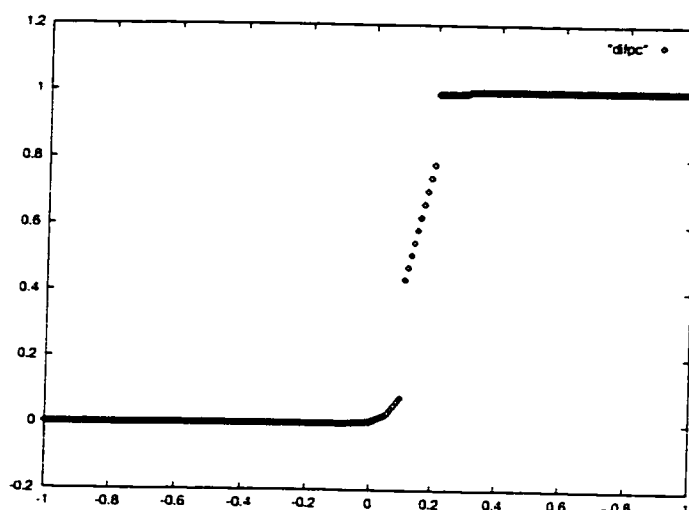


Figure 6.27 Coupe en sortie pour la méthode de diffusion orthogonale par élément, $d_K = 10^{-8}$ et projection bornée sur ∂K .

que $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$ à la précision de la machine. Dans un premier temps, on utilise directement le champ de vecteurs solution des équations de Stokes. On obtient alors la solution, peu intéressante du point de vue numérique, illustrée aux figures 6.28 et 6.29. Cependant, cette solution était prévisible à la lumière des arguments présentés dans la dernière section du chapitre 4. Puisque le champ de vecteurs est $(Q_9)^2$ et que la pseudo concentration est quadratique incomplète, il est peu probable qu'il existe une solution autre que constante dans chaque K . En effet, du point de vue géométrique, imposer que $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$ est identique à demander de trouver une fonction f dont le gradient est orthogonal au champ de vecteurs en chaque point de K . Autrement dit, si le champ de vecteurs \vec{u} est le moins riche qu'un champ de vecteurs pour lequel u_1 est proportionnel à $\partial f / \partial y$ et u_2 proportionnel à $\partial f / \partial x$ alors il est impossible que les isolignes de f s'alignent avec les caractéristiques. Le plan est alors la seule solution telle que $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$. On voit très bien sur le graphique 6.28 que la solution $f = 0.5$ est obtenue sur l'élément contenant la discontinuité initiale, de $f = 0.25$ et $f = 0.75$ sur les éléments adjacents et ainsi de suite dans le reste du domaine.

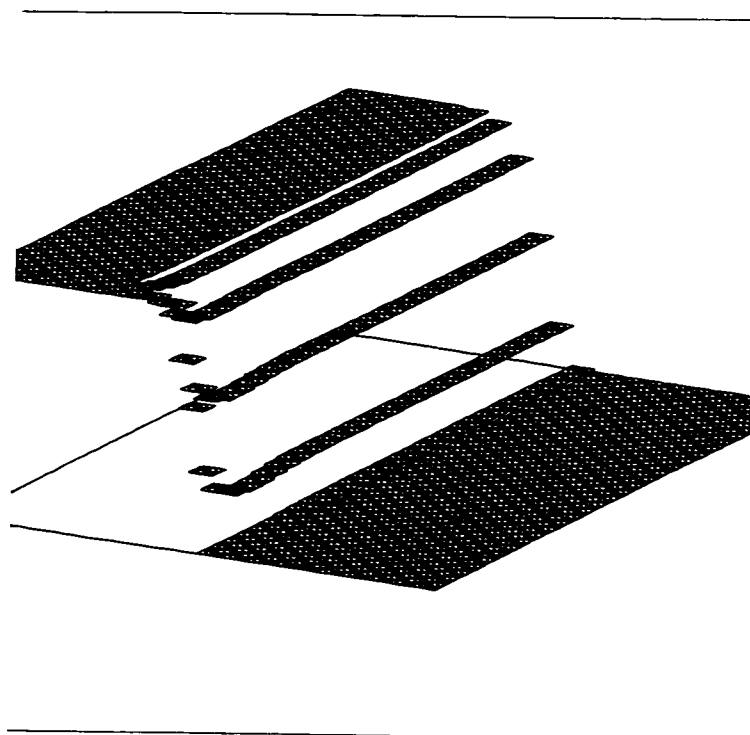


Figure 6.28 *Méthode mixte.*

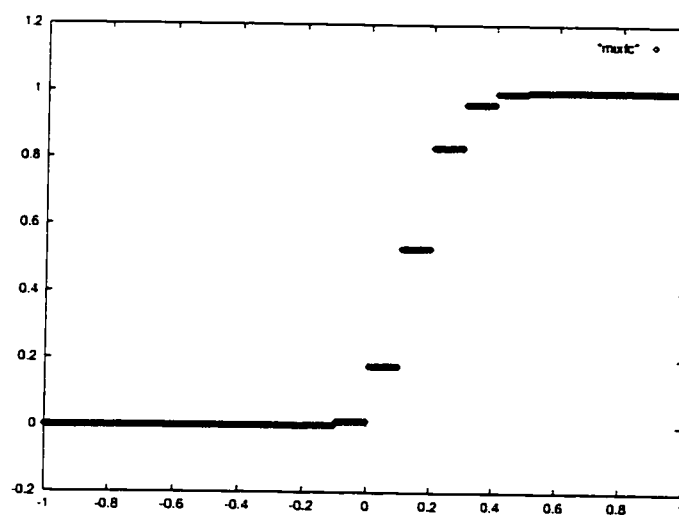


Figure 6.29 *Coupe en sortie pour la méthode mixte.*

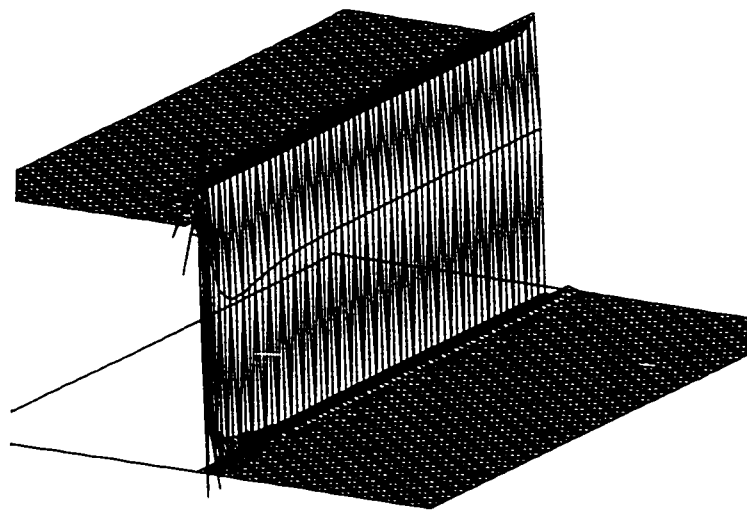


Figure 6.30 *Méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes.*

Dans un second temps, on projette le champ de vecteurs sur les constantes. Dans ce cas on a enrichi la palette de solutions puisque maintenant les solutions constantes, les plans et les cylindres hyperboliques sont des solutions potentielles (si les isolignes des deux dernières classes de fonctions s'alignent avec les droites, ce qui est toujours possible). On retrouve maintenant une solution semblable à celle obtenue par la méthode de Lesaint-Raviart. Cependant cette méthode offre l'avantage que pour un champ de vecteurs donné, on peut simplement augmenter le degré des fonctions de base utilisées pour la contrainte pour s'assurer d'avoir $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$, ce qui n'est pas évident à faire pour la méthode de Lesaint-Raviart.

On utilise la même astuce que pour les autres méthodes pour régulariser la

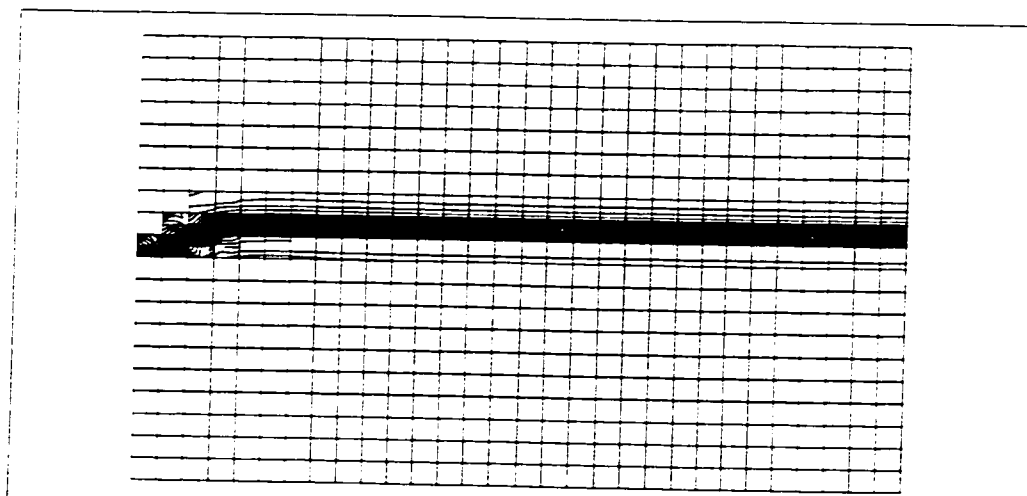


Figure 6.31 Méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes.

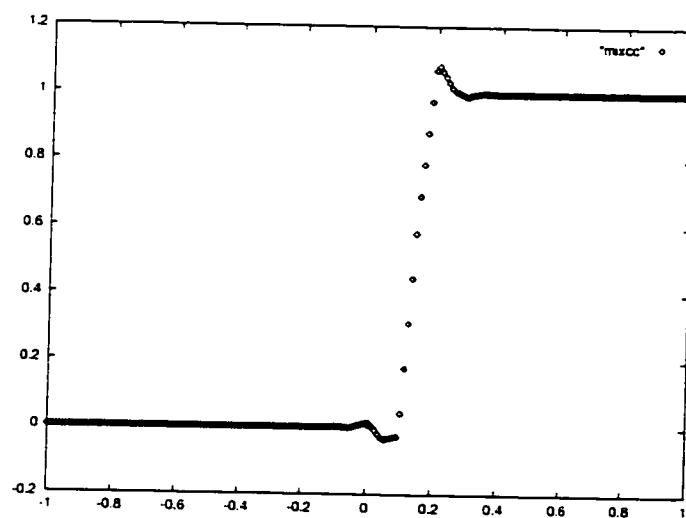


Figure 6.32 Coupe en sortie pour la méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes.

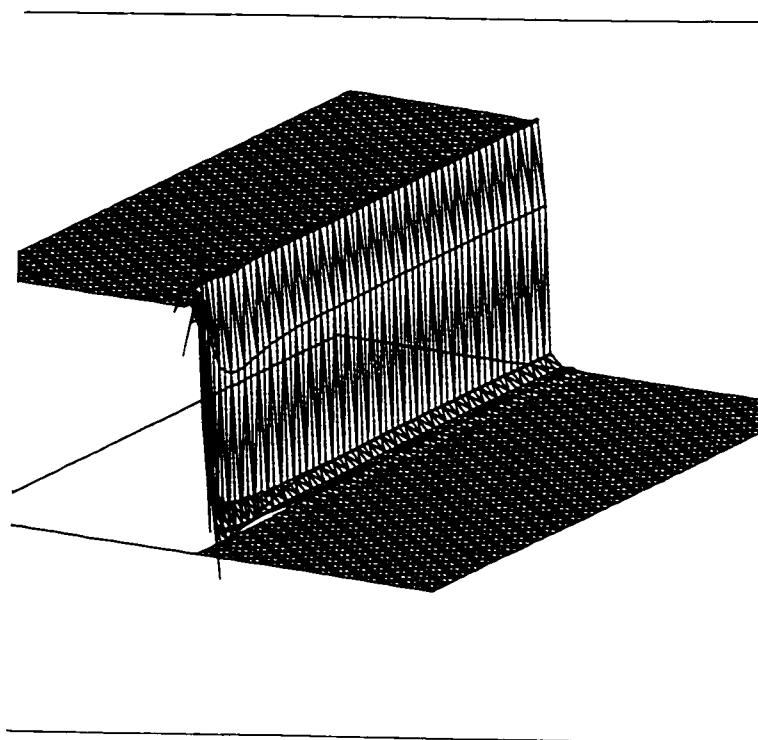


Figure 6.33 *Méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes et projection de f bornée sur ∂K^- .*

solution obtenue. En appliquant la projection sur ∂K^- on obtient presque les résultats désirés (voir les figures 6.33, 6.34) et 6.35. On rappelle que cette projection ne conserve pas la monotonie, ni la masse et qu'elle travaille sur des points intérieurs à ∂K^- . On remarque finalement que de légères oscillations semblables étaient obtenues pour la méthode de Lesaint-Raviart avec projection bornée sur K jusqu'à ce que l'on utilise un algorithme pour l'intégration numérique basée sur la méthode des trapèzes (pour une subdivision de K en triangles). Cette remarque laisse entrevoir des améliorations possibles à la projection utilisée dans cette section.

On conclut en observant que la méthode idéale n'a pas été trouvée, même si la version du schéma de Lesaint-Raviart avec une projection bornée sur K fournit d'excellents résultats. Elle est itérative sur chaque élément et ralentit l'algorithme

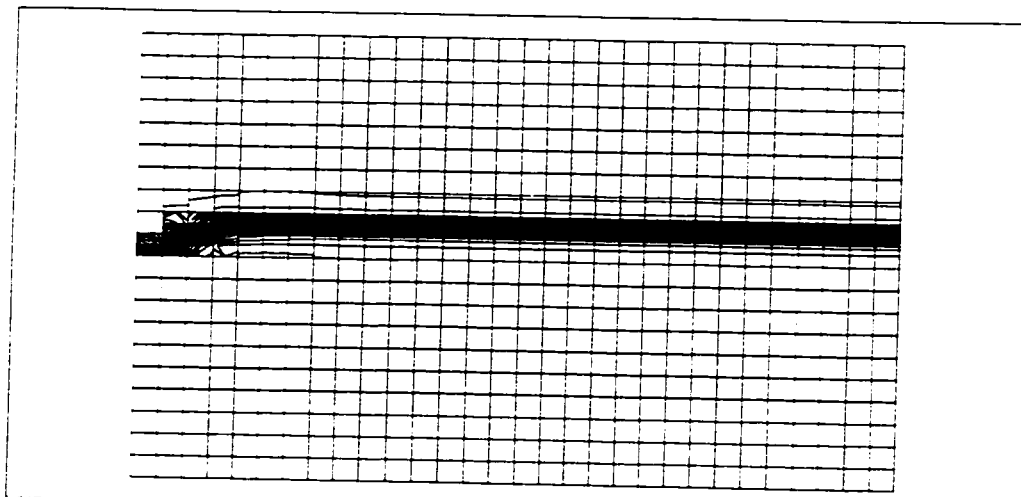


Figure 6.34 Méthode mixte avec avec projection du champ de vecteurs sur les constantes et projection de f bornée sur ∂K^- .

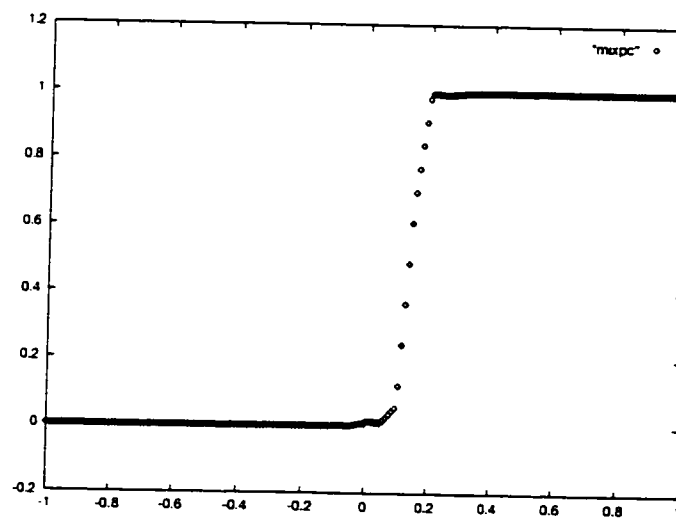


Figure 6.35 Coupe en sortie pour la méthode mixte avec projection du champ de vecteurs sur les constantes et projection de f bornée sur ∂K^- .

original par un facteur d'au moins 4. On soutient que la méthode idéale serait basée sur la méthode mixte avec un ajout de viscosité sur la frontière entrante de chaque élément. Cependant, comme on l'a vu, on ne connaît pas encore de méthode infaillible pour déterminer la quantité de viscosité à ajouter d'élément en élément.

6.2.2 Contraction: cas non newtonien et viscoélastique

Dans cette section on cherche à reproduire des résultats obtenus dans les mémoires de Carrier [6] et Chapleau [10]. On se propose en premier lieu d'étudier l'écoulement stratifié suivant: on introduit deux fluides différents dans les deux canaux du coté gauche de la géométrie présentée à la figure (6.36). Le fluide est alors libre de sortir par le canal situé à la droite de cette même figure. Les profils sont imposés à l'entrée comme étant des écoulements développés et à la sortie on a imposé un profil horizontal ($v = 0$). Les débits utilisés sont de $Q_0 = 0.58686$ pour le fluide supérieur (fluide 0) et de $Q_1 = 0.10599$ pour le fluide de la partie inférieure (fluide 1). Les constantes rhéologiques sont les suivantes: $\eta_0^* = 1001.27$, $\eta_1^* = 12152.2$, $t_0 = 0.302753$, $t_1 = 0.867992$, $n_0 = 0.721821$ et $n_1 = 0.494111$. Un maillage de 1560 éléments a été utilisé pour cette simulation. À la figure (6.36) on présente l'interface calculée qui est identique pour la méthode de Lesaint-Raviart et sa version bornée. On remarque cependant une dispersion moins grande de l'interface pour la méthode bornée que pour la méthode de Lesaint-Raviart originale (voir figures (6.37) et (6.39)). On montre aussi aux figures (6.38) et (6.40) le graphe de la pseudo-concentration où la méthode bornée donne une solution dont les oscillations sont de l'ordre de 8.0×10^{-5} alors que pour la méthode de Lesaint-Raviart, on observe des oscillations caractéristiques de l'ordre de 2.8×10^{-1} .

Dans un second temps, on réutilise la même géométrie mais cette fois-ci pour un fluide newtonien dans la partie supérieure et un fluide viscoélastique de type

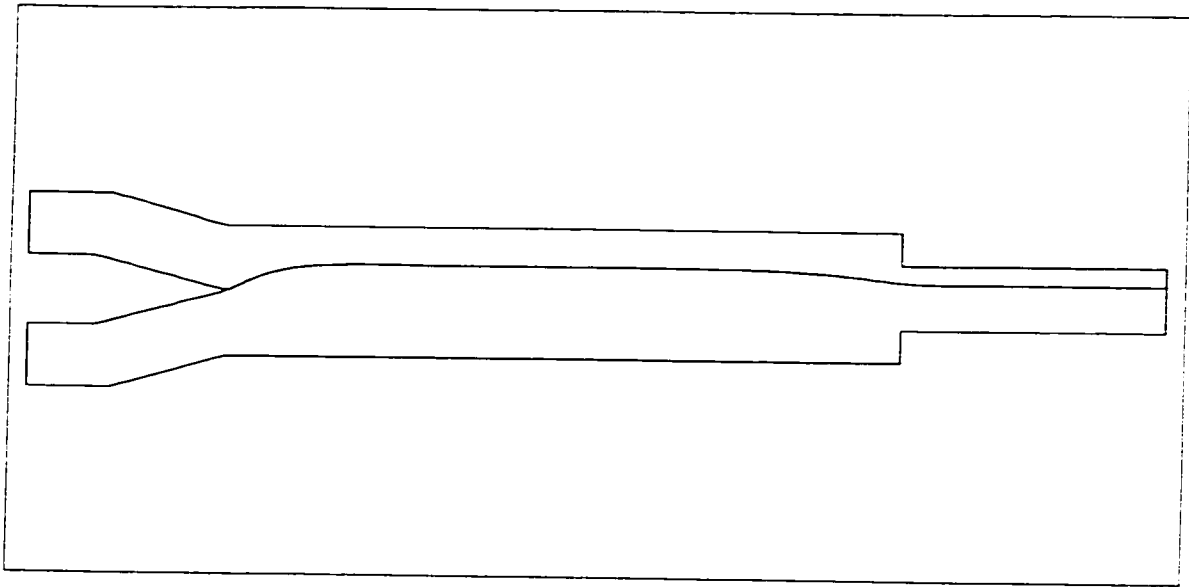


Figure 6.36 *Position de l'interface: méthode de Lesaint-Raviart originale.*

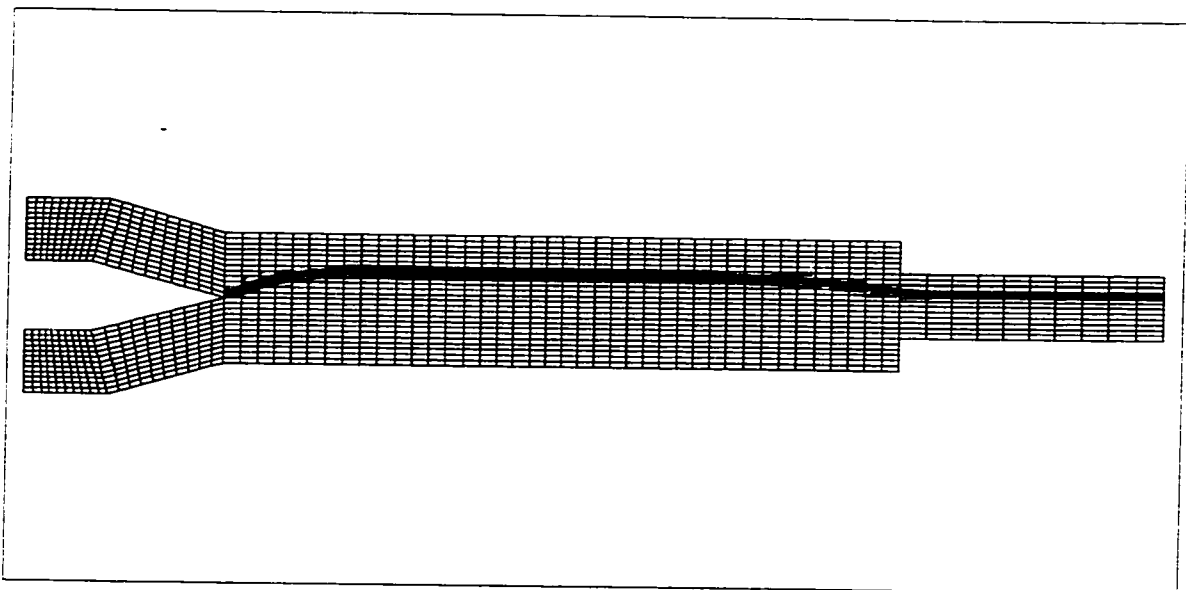


Figure 6.37 *Dispersion de l'interface: méthode de Lesaint-Raviart originale.*

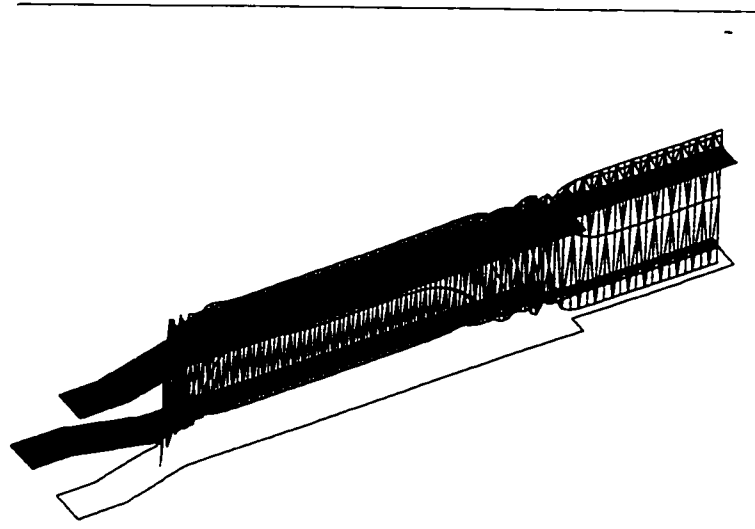


Figure 6.38 *Graph of f : method of Lesaint-Raviart original.*

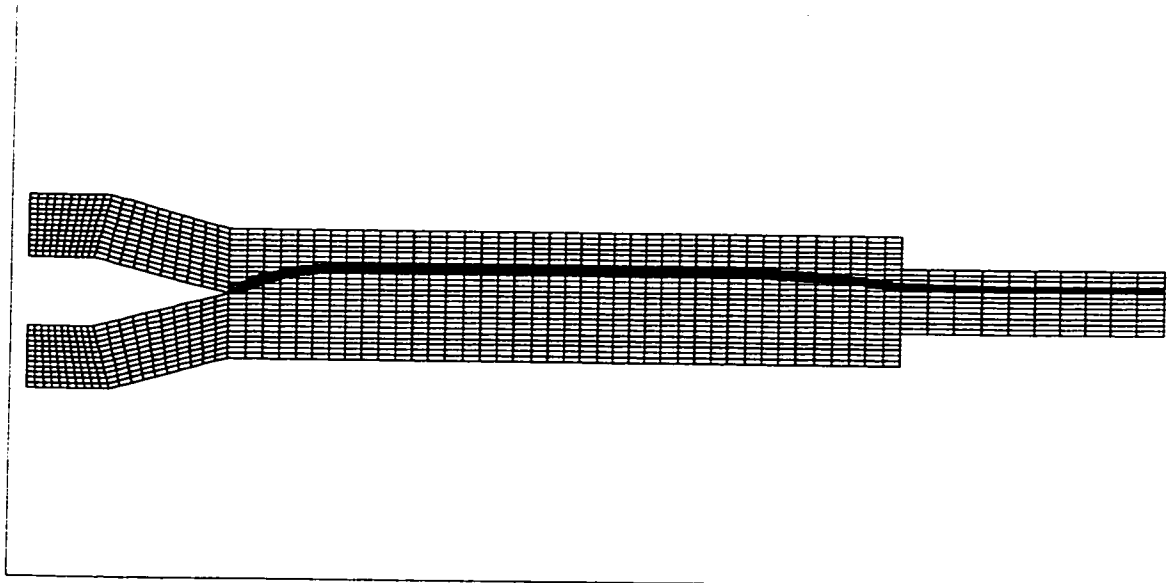


Figure 6.39 *Dispersion of the interface: method of Lesaint-Raviart with projection.*

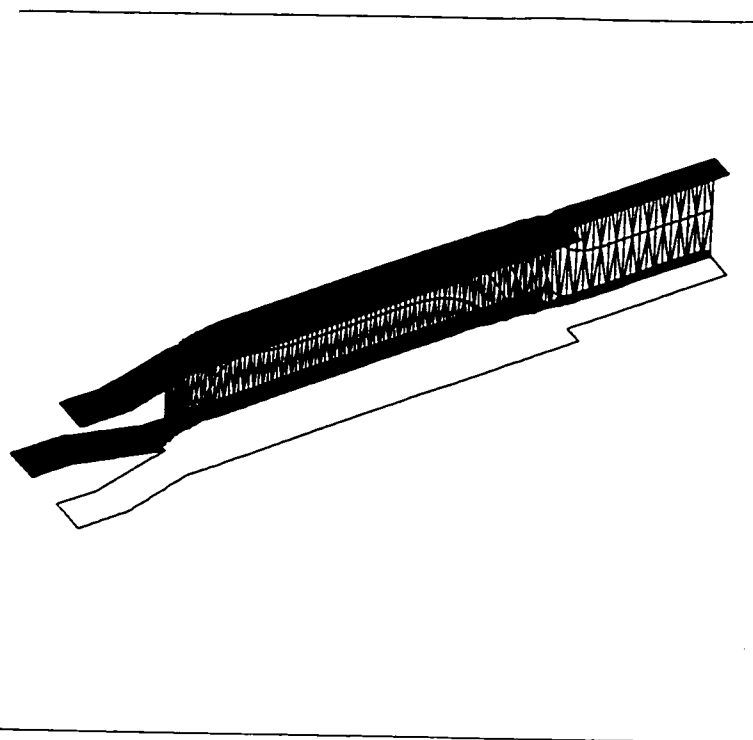


Figure 6.40 *Graphe de f : méthode de Lesaint-Raviart avec projection.*

PTT dans la partie inférieure de la filière. Les paramètres utilisés sont les suivants: $\eta_n = 1.0$, $Q_n = 0.1$, $\eta_v = 1.0$, $\epsilon = 0.1$ et $Q_v = 0.2$. On a ici cherché à déterminer l'influence du fluide viscoélastique sur le positionnement de l'interface en fonction de λ . Les résultats concernant la pseudo-concentration étant identiques à ceux illustrés pour le premier essai numérique, on a choisi de ne pas présenter des figures inutilement. On se contente donc de commenter les résultats, aux figures (6.41) et (6.43) où on montre le positionnement des interfaces pour les différents λ utilisés dans le modèle de PTT. Pour des fins de visualisation, on a contracté le maillage par un facteur 3 en x dans le post-processeur.

Lorsque λ augmente progressivement de 0 à 12, le fluide viscoélastique tire l'interface vers le bas. On a illustré les interfaces que pour des incréments de 4 en λ en partant du cas newtonien/newtonien ($\lambda = 0.0$). De plus, on a agrandi

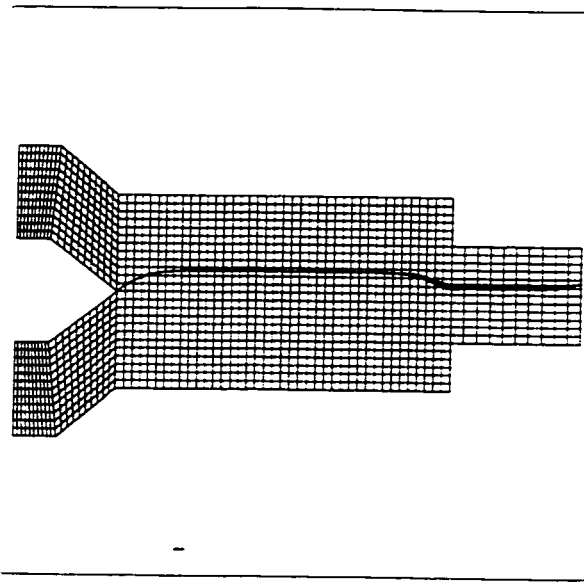


Figure 6.41 *Position des 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.*

la sortie de la filière aux figures (6.42) et (6.44) pour bien voir l'effet obtenu. On remarque un fait important sur ces dernières figures. Les extra-contraintes calculées sont complètement fausses en sortie. Cela est dû à la condition imposée en sortie:

$$\sigma \cdot \vec{n} = 0$$

qui n'est valide que dans le cas newtonien. Dans le cas viscoélastique, on ne sait pas quelle condition imposer lorsqu'on ne connaît pas le profil en sortie. Le même problème reviendra pour le problème de la prochaine section avec pour conséquence la perte de convergence de l'algorithme.

On conclut cette section en disant que la méthode est bel et bien "autonome" puisqu'à la fin de l'entrée en V une discontinuité se crée et la méthode détecte l'anomalie et la traite en conséquence.

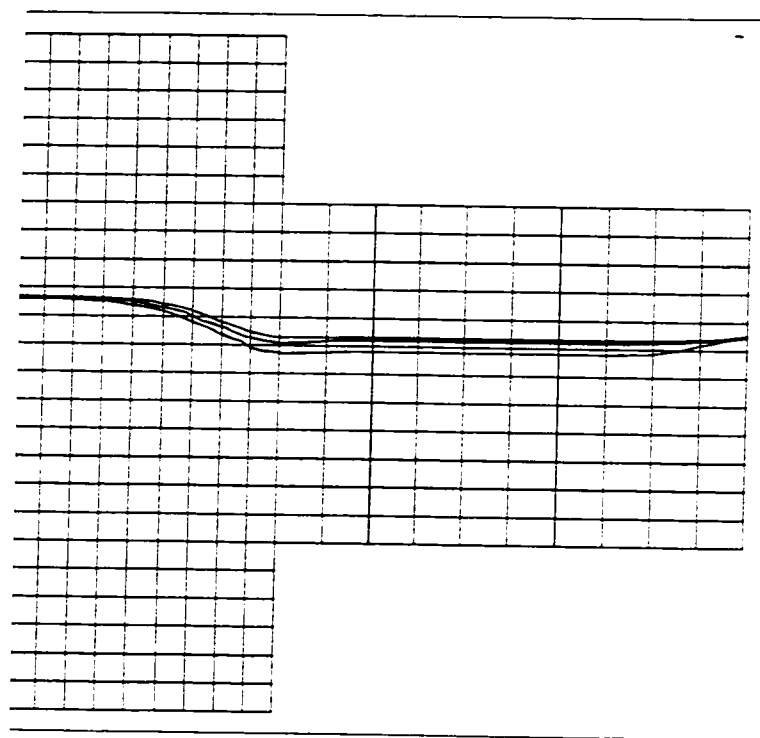


Figure 6.42 *Agrandissement des 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.*

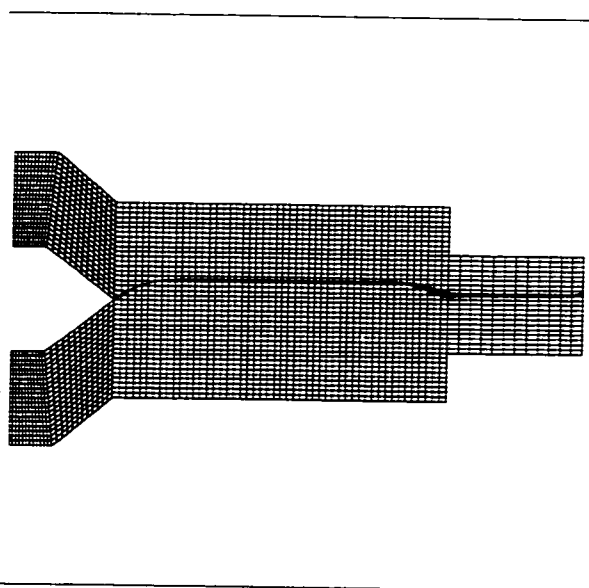


Figure 6.43 *Position 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.*

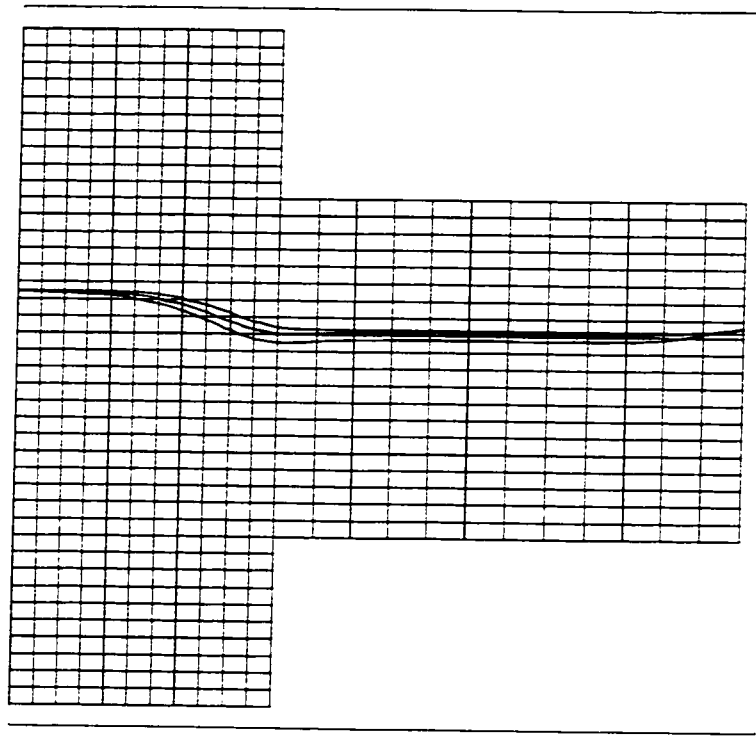


Figure 6.44 Agrandissement des 3 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.

6.2.3 Écoulement viscoélastique dans une géométrie en T

Cette section a pour but de reproduire des résultats obtenus dans l'article de Dheur et Crochet [18] (voir aussi [17]). On veut reproduire numériquement un écoulement stratifié d'un fluide newtonien et d'un fluide viscoélastique de type Oldroyd-B (voir [3]). Pour ce faire on utilise la géométrie présentée aux figures 6.45 et 6.46. L'écoulement est le suivant: on introduit un fluide viscoélastique dans la partie supérieure gauche de la filière en T et un fluide newtonien dans la partie supérieure droite de la filière et les fluides ainsi injectés sortent par la base du T, formant tout le long du canal vertical une interface. Le fluide newtonien est de viscosité $\eta_n = 1.0$ et le fluide viscoélastique est de viscosité $\eta_v = 1.0$. Les débits utilisés sont respectivement $Q_n = 0.1/\lambda$ et $Q_v = 0.544/\lambda$. λ est le temps de relaxation du modèle Oldroyd-B ($\epsilon = 0.0$ dans 6.3).

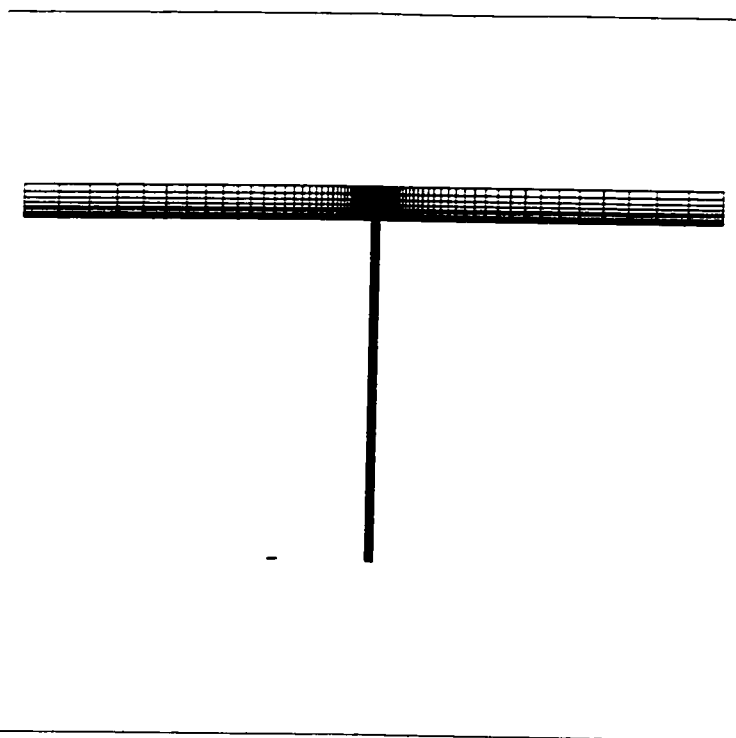


Figure 6.45 *Premier maillage pour l'écoulement dans un T.*

Cette forme inhabituelle du débit Q_v est dû au fait que l'on veut utiliser les mêmes paramètres fixes que pour le cas 1 de l'article [18] où on trouve le tableau suivant: où le nombre de Weissenberg est donné par $W_v = \lambda U/L$ et le nombre de Deborah par $De = \lambda \dot{\gamma}_{paroi}$ avec U une vitesse caractéristique (la vitesse maximum sur les parties entrantes du T). L une longueur caractéristique (la largeur des parties

Tableau 6.2 Liste des paramètres

Paramètres	Cas 1	Cas 2
Rapport de viscosité η_v/η_n	1.87	1.87
Rapport de débits Q_v/Q_n	5.44	1.16
Nombre de Weissenberg W_v ($W_n = 0.0$)	0.06	0.052
Nombre de Deborah De en sortie	7.2	9.5

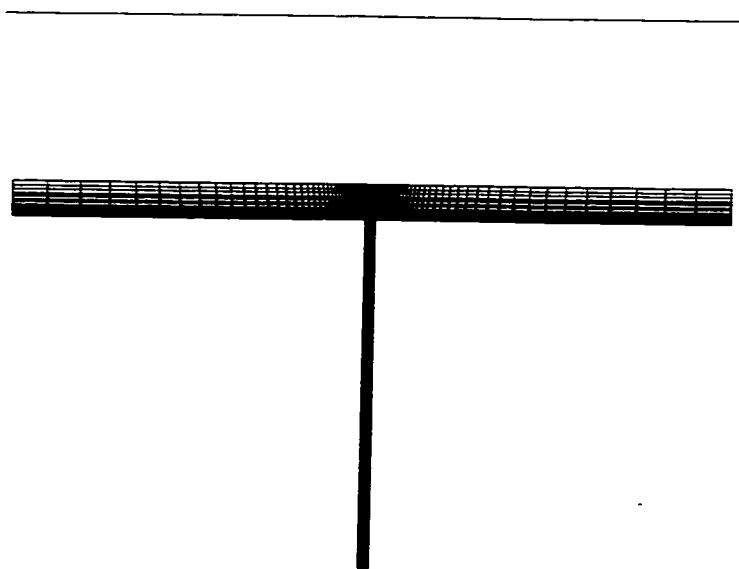


Figure 6.46 *Deuxième maillage pour l'écoulement dans un T.*

entrantes du T) et $\dot{\gamma}_{paroi}$ le cisaillement à la paroi en sortie. Les résultats obtenus sont quelque peu décevants puisqu'on a seulement des résultats pour $\lambda = 0.1102, 0.2206$ et 0.3309 , ce qui se traduit par les nombres de Deborah de $0.6, 1.2$ et 1.7 respectivement, après quoi la méthode ne converge plus. On est loin de la valeur de comparaison expérimentale de $D_e = 7.2$ utilisée dans [18]. De toute évidence la condition en sortie, où on a imposé un profil de vitesse vertical en est la cause puisque des contraintes parasites se développent près de la sortie et remontent le long de la tige verticale en augmentant λ . Malheureusement, on ne trouve pas dans [18] les conditions utilisées en sortie pour les fluides newtonien et viscoélastique. On a tenté d'introduire sans succès une condition de périodicité entre la région où l'écoulement est développé et la sortie. Les figures (6.47) et (6.48) montrent la position de l'interface pour les quatre différentes valeurs de λ . On remarque que l'interface se déplace vers la gauche en augmentant λ ce qui concorde avec [18].

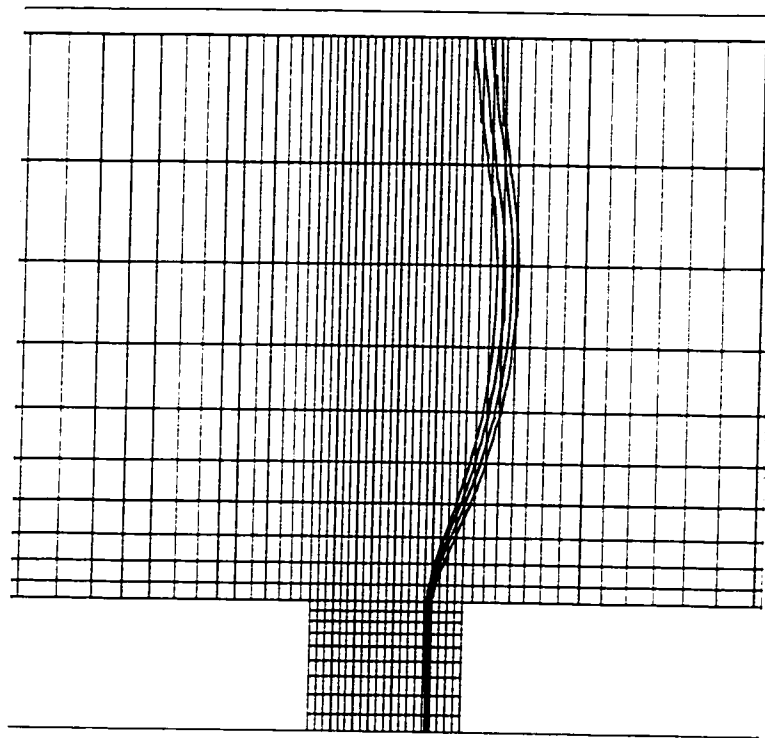


Figure 6.47 *Position des 4 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.*

Malgré le faible écart entre le cas newtonien/newtonien et le cas viscoélastique/newtonien, on présente tout de même les lignes courant qui mettent en évidence une zone de recirculation qui se déplace vers la gauche et qui s'agrandit légèrement. Le même résultat est observé dans [18]. Les figures (6.49) et (6.51) représentent le cas newtonien/newtonien sur les deux maillage utilisés. Les figures (6.50) et (6.52) présentent le cas newtonien/viscoélastique pour $De = 1.7$.

On conclut en disant que les résultats obtenus dans cette section sont qualitativement corrects, bien que des efforts restent à faire dans le cas viscoélastique.

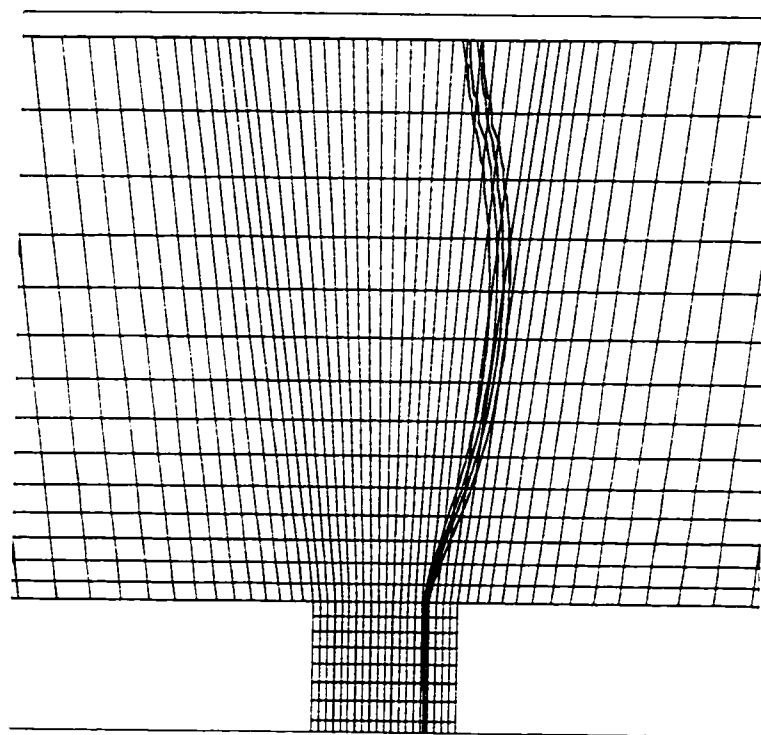


Figure 6.48 *Position des 4 interfaces: méthode de Lesaint-Raviart avec projection.*

6.3 Moulage

Les problèmes de moulage par injection sont traités de manière similaire à celle utilisée pour la coextrusion. Cela nécessite cependant l'introduction d'un deuxième fluide, appelé fluide fictif qui occupe la partie vide du moule (voir Dhatt-Gao[16]). Concrètement, ce fluide est choisi de manière à ne pas influencer la position du front. Pour ce faire, on choisit un fluide incompressible de viscosité 10^3 fois inférieure à celle du véritable fluide.

La technique de remplissage d'un moule est la suivante. On calcule à un temps donné le champ de vecteurs qui est solution des équations de Stokes pour une fonction de pseudo-concentration fixe (localisation des fluides au temps en question). Pour la résolution des équations de Stokes, dans tous les cas étudiés, on a imposé

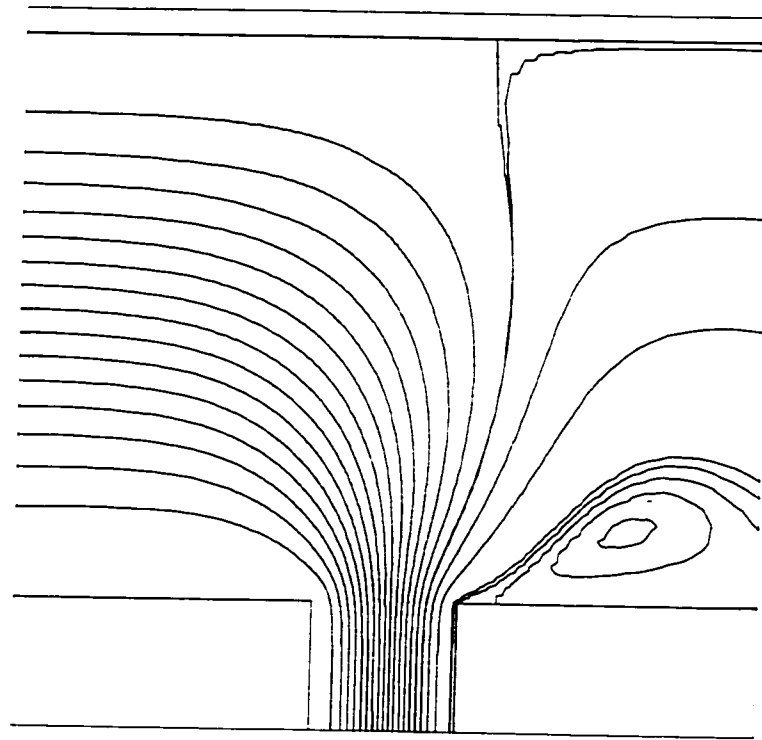


Figure 6.49 Trajectoires et position de l'interface: maillage N°1 et $D_e = 0$.

la condition de non glissement à la paroi lorsque le fluide injecté la touche. Ce n'est pas toujours le cas dans les programmes de moulage par injection où très souvent on se contente d'une condition de glissement à la paroi. Cela empêche de modéliser par exemple l'effet fontaine, phénomène extrêmement important lorsqu'on considère les questions d'orientation (voir par exemple Fortin-Béliveau-Demay [23]).

Dans un premier temps, une condition naturelle libre $\sigma \cdot \vec{n} = 0$ est imposée là où le fluide fictif touche à la frontière. En d'autres termes, ce fluide fictif peut entrer ou sortir à volonté du moule (condition dite de flux libre). On ne peut donc pas assimiler le fluide fictif à de l'air. L'imposition du collement est faite à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange.

On fait ensuite avancer le front suivant ce champ de vecteurs en résolvant

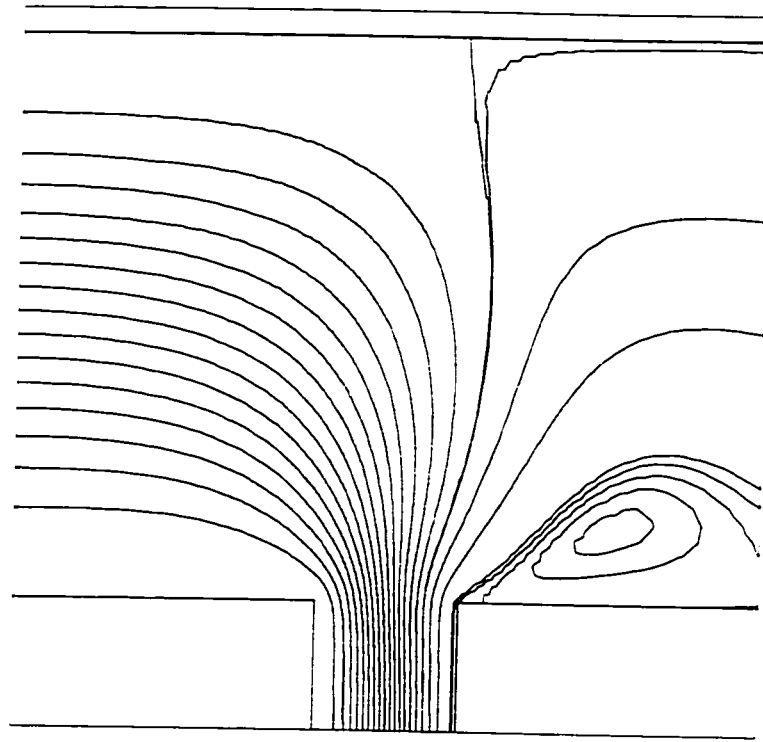


Figure 6.50 *Trajectoires et position de l'interface: maillage N°1 et $D_e = 1.7$.*

l'équation pour f , ce qui se résume à l'algorithme suivant:

- Injection (Algol)
- Pour chaque pas de temps t^n :
 - (1) Résoudre le problème de Stokes pour approcher l'écoulement du front avec imposition du collement à la paroi lorsque $f \geq 1/2$ par un lagrangien augmenté;
 - (2) Résoudre l'équation de transport pour trouver la nouvelle position du front;
 - (3) Passer au pas de temps suivant;

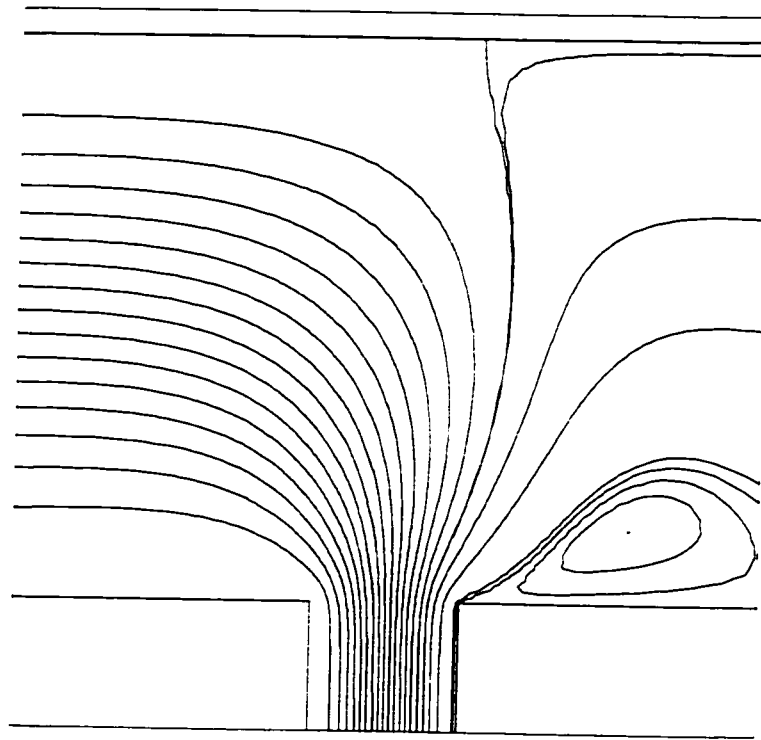


Figure 6.51 Trajectories et position de l'interface: maillage N°2 et $D_e = 0$.

L'étape 1 de Algo1 s'écrit:

- Étant donnés p_0 , λ_0 et β_0 .
 - Boucle sur $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \geq \epsilon_\lambda$
 - * Boucle sur $|\beta_j - \beta_{j-1}| \geq \epsilon_\beta$
 - Boucle sur $|p_i - p_{i-1}| \geq \epsilon_p$ (Méthode d'Uzawa)
 - Résoudre le système linéaire pour u^n :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (2\eta(f)\dot{\gamma}(\bar{u}) : \dot{\gamma}(\bar{v}) - p_i \nabla \cdot \bar{v} + r \nabla \cdot \bar{u} \nabla \cdot \bar{v}) \, d\bar{x} \\
 &= - \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau}(f) - 2\alpha \mathbf{d}) : \dot{\gamma}(\bar{v}) \, d\bar{x} \\
 &+ \int_{\Omega} \frac{\bar{c}}{R} \nabla f \cdot d\bar{x} + \int_{\Omega} \bar{s} \cdot \bar{v} \, d\bar{x} \qquad \forall \bar{v} \in V.
 \end{aligned}$$

- Mise à jour de p : $p_{i+1} = p_i - \rho(\nabla \cdot \bar{u})$

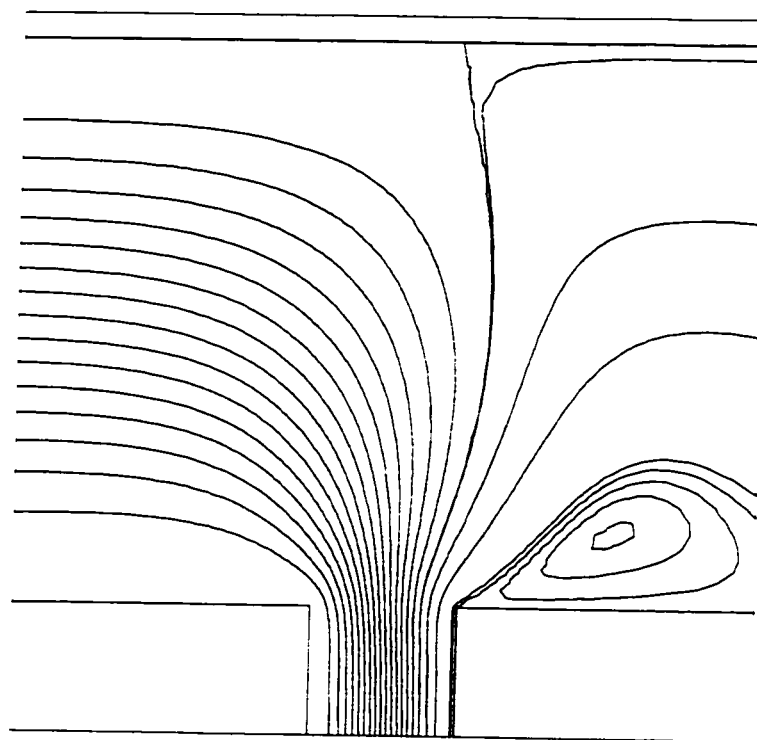


Figure 6.52 Trajectoires et position de l'interface: maillage $N^{\circ}2$ et $D_e = 1.7$.

- Fin boucle p (Méthode d'Uzawa)
- * Mise à jour de β : $\beta_{j+1} = \min\{0, -\vec{u}^n \cdot \vec{n} + \lambda_k/r\}$
- * Fin boucle β
- Mise à jour de λ : $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(-\vec{u}^n \cdot \vec{n} - \beta_i)$
- Fin boucle λ

Nous allons considérer une géométrie relativement simple illustrée à la figure 6.53. La difficulté principale de ce problème est le passage du coin qui présente une singularité. Cela est illustré à la figure 6.58 où on voit clairement que le fluide fictif (dans la partie vide du moule) entraîne le fluide dans une fausse direction. Cette affirmation semble confirmée par la séquence des figures 6.56 à 6.60. On y voit un décollement du fluide injecté sur la paroi gauche (voir figure 6.59). Cependant, il faut

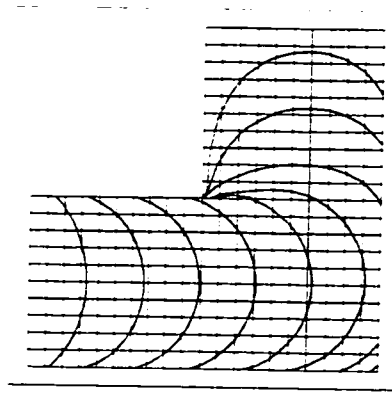


Figure 6.53 *Position du front (flux libre), maillage 1.*

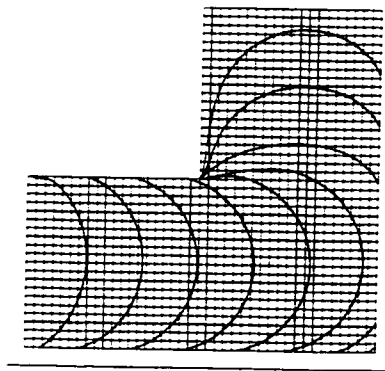


Figure 6.54 *Position du front (flux libre), maillage 2.*

attendre que le fluide injecté ait totalement tourné le coin pour que le mouvement de la partie supérieure du moule se redresse avec le reste de l'écoulement. Le fluide injecté ne colle finalement jamais à la paroi gauche au dessus du coin, ce que l'on observe à la figure 6.60.

Pour modifier ce comportement, on change la condition de frontière libre par une condition de flux sortant $\sigma \cdot \vec{n} \geq 0$ partout où c'est le fluide fictif qui touche à la paroi. Ainsi, le fluide fictif ne peut que sortir de la cavité. Ce choix de condition frontière pour le problème de Stokes global s'interprète comme étant un problème

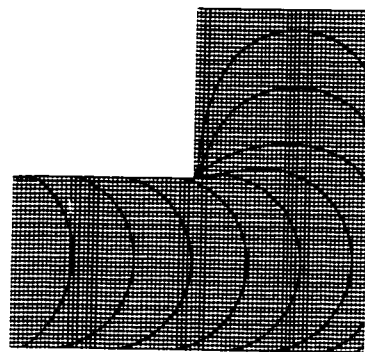


Figure 6.55 *Position du front (flux libre). maillage 3.*

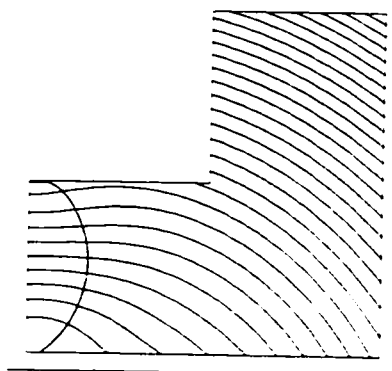


Figure 6.56 *Position du front et trajectoires (flux libre). maillage 3.*

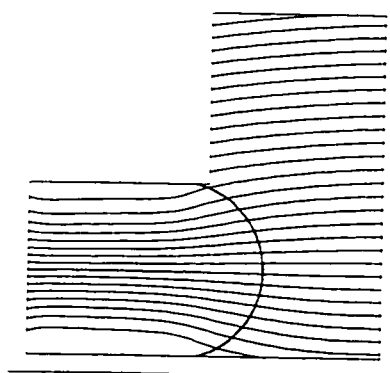


Figure 6.57 *Position du front et trajectoires (flux libre). maillage 3.*

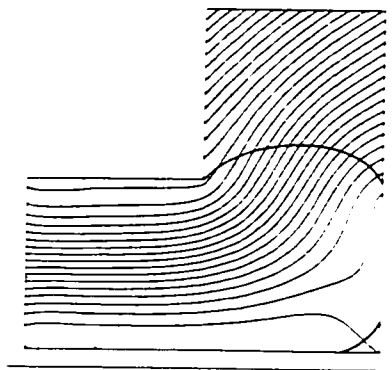


Figure 6.58 *Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.*

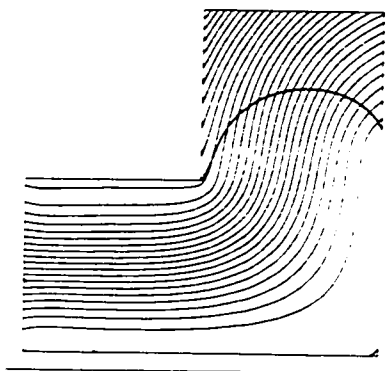


Figure 6.59 *Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.*

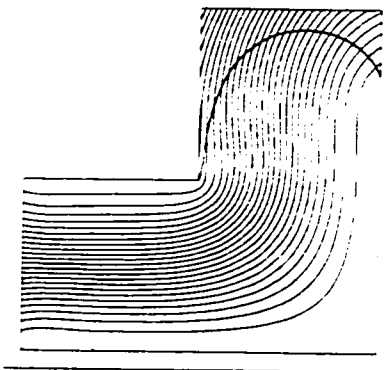


Figure 6.60 *Position du front et trajectoires (flux libre), maillage 3.*

d'inéquation variationnelle. Des méthodes de résolution numériques utilisant une formulation lagrangien augmenté pour ce type d'inéquations sont présentes dans [26]. On utilise la version ALG2 de [26] et on modifie l'étape 1 de Algo1 par l'agorithme suivant.

- Injection (Algo2)

- Étant donné p_0 , λ_0 et \mathcal{J}_0 .

- Boucle sur $|\lambda_{k+1} - \lambda_k| \geq \epsilon_\lambda$

- * Boucle sur $|\mathcal{J}_j - \mathcal{J}_{j-1}| \geq \epsilon_\mathcal{J}$

- Boucle sur $|p_i - p_{i-1}| \geq \epsilon_p$ (Méthode d'Uzawa)

- Résoudre le système linéaire pour u^n :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} 2(\eta(f)\dot{\gamma}(\bar{u}) : \dot{\gamma}(\bar{v}) - p_i \nabla \cdot \bar{v} + r \nabla \cdot \bar{u} \nabla \cdot \bar{v}) \, d\bar{x} \\ &= - \int_{\Omega} (\tau(f) - 2\alpha \mathbf{d}) : \dot{\gamma}(\bar{v}) \, d\bar{x} \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}}{R} \nabla f \cdot d\bar{x} + \int_{\Omega} \bar{s} \cdot \bar{v} \, d\bar{x} \end{aligned} \quad \forall \bar{v} \in V.$$

- Mise à jour de p : $p_{i+1} = p_i - \rho(\nabla \cdot \bar{u})$

- Fin boucle p (Méthode d'Uzawa)

- * Mise à jour de \mathcal{J} : $\mathcal{J}_{j+1} = \min\{0, -\bar{u}^n \cdot \bar{n} + \lambda_k/r\}$

- * Fin boucle \mathcal{J}

- Mise à jour de λ : $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(-\bar{u}^n \cdot \bar{n} - \mathcal{J}_i/r)$

- Fin boucle λ

Par souci de clarté on a choisi de ne pas inclure dans cet algorithme la boucle sur l'imposition du collement à la paroi ($u = v = 0$ là où $f \geq 1/2$, donné dans Algo1) puisque ce genre de technique est classique pour des conditions bi-latérales.

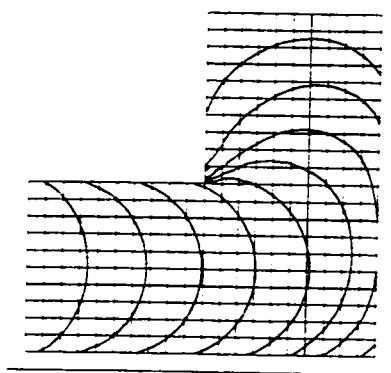


Figure 6.61 *Position du front (flux sortant), maillage 1.*

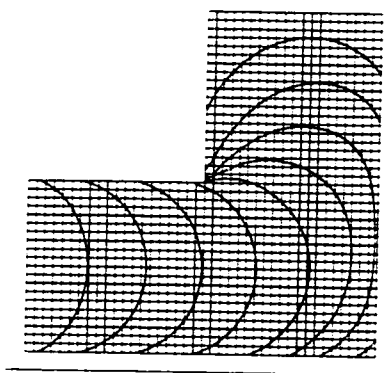


Figure 6.62 *Position du front (flux sortant), maillage 2.*

On n'insistera pas plus sur l'imposition du débit en entrée et on réfère le lecteur à l'article de Fortin [22] pour les détails. On présente finalement les résultats obtenus pour les deux algorithmes décrits.

En observant les figures 6.64 à 6.68, on constate un comportement beaucoup plus réaliste avec une condition de flux sortant. Les résultats présentés sont très similaires à ceux de Fauchon-Tanguy-Dannelongue [21]. On remarque cependant la présence surprenante d'une zone de recirculation dans l'angle du coude. Cette zone est dans le fluide fictif (en aval du front) et semble provoquer la projection du front sur la paroi gauche. Il semble cependant difficile d'affirmer s'il s'agit d'un phénomène

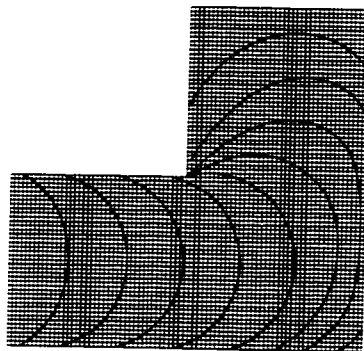


Figure 6.63 *Position du front (flux sortant), maillage 3.*

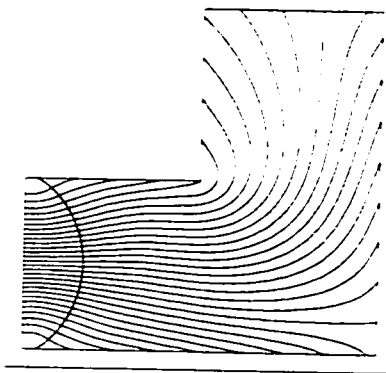


Figure 6.64 *Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.*

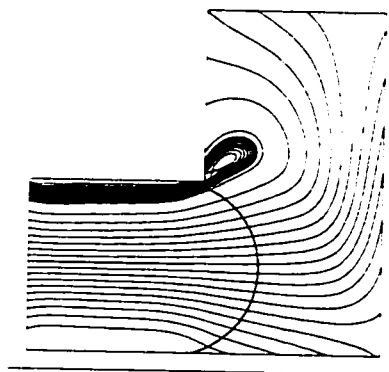


Figure 6.65 *Position du front et trajectoires (flux sortant), maillage 3.*

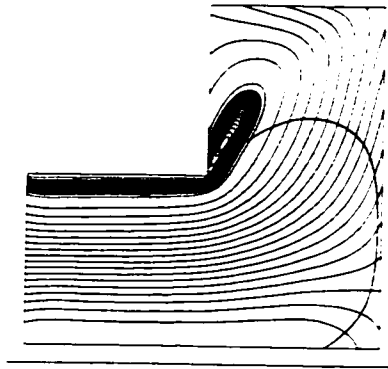


Figure 6.66 *Position du front et trajectoires (flux sortant). maillage 3.*

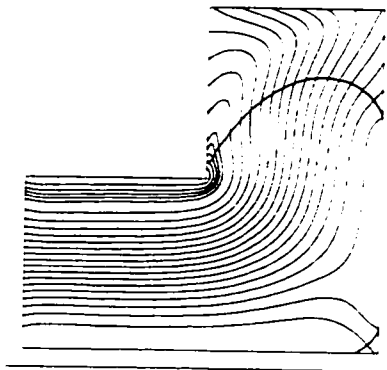


Figure 6.67 *Position du front et trajectoires (flux sortant). maillage 3.*

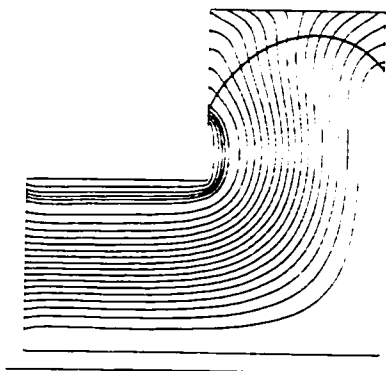


Figure 6.68 *Position du front et trajectoires (flux sortant). maillage 3.*

réel.

6.4 Tension superficielle

Dans cette sous-section on veut premièrement évaluer l'intégrale représentant la tension superficielle dans (6.14). Une fois cette évaluation obtenue, on s'attarde ensuite à la simulation numérique de certains écoulements où la tension superficielle joue un rôle fondamental.

On cherche dans un premier temps à transformer la formulation surfacique du phénomène de tension superficielle en une formulation équivalente volumique. Cela évite d'avoir à localiser très précisément la position de l'interface. Une façon de procéder pour arriver à ce type d'équivalence se retrouve dans Brackbill-Kothe-Zemach [4] et Demay-Béliveau-Fortin [15]. En reprenant ce type d'arguments, on peut transformer l'intégrale surfacique de (6.14) en une intégrale volumique. Suivant la démarche présentée dans Demay-Béliveau-Fortin [15], on introduit f^ϵ la régularisée par convolution de la solution f par une fonction lisse ρ^ϵ :

$$f^\epsilon = \rho^\epsilon * f$$

Dans ce cas on approche la position de l'interface Γ par Γ^ϵ dont la définition est:

$$\Gamma^\epsilon = \left\{ \vec{x} \in \Omega, f^\epsilon(\vec{x}) = \frac{1}{2} \right\}$$

Soient $\vec{n}^\epsilon = (n_1^\epsilon, n_2^\epsilon)$ le vecteur normal et \vec{t}^ϵ le vecteur tangent à Γ^ϵ . On définit donc:

$$\vec{n}^\epsilon = \frac{\nabla f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} \quad : \quad t_1^\epsilon = n_2^\epsilon \quad : \quad t_2^\epsilon = -n_1^\epsilon \quad (6.16)$$

ce qui permet définir la courbure R^ϵ par la relation:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\vec{t}^\epsilon) = \frac{1}{R^\epsilon} \vec{n}^\epsilon \quad \text{avec} \quad \frac{\partial}{\partial s} = \vec{t}^\epsilon \cdot \nabla \quad (6.17)$$

Pour démontrer ce résultat, on utilise les lemmes bien connus suivants:

Lemme 1: La courbure R^ϵ est obtenue de la divergence du vecteur normal \vec{n}^ϵ par la formule:

$$\nabla \cdot \vec{n}^\epsilon = -\frac{1}{R^\epsilon} \quad (6.18)$$

Preuve: En développant l'équation (6.17) on obtient:

$$n_2^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_1}(\vec{t}^\epsilon) - n_1^\epsilon \frac{\partial}{\partial x_2}(\vec{t}^\epsilon) = \frac{1}{R^\epsilon} \vec{n}^\epsilon$$

En effectuant le produit scalaire avec \vec{n}^ϵ , on a:

$$n_1^\epsilon n_2^\epsilon \frac{\partial n_2^\epsilon}{\partial x_1} - (n_1^\epsilon)^2 \frac{\partial n_2^\epsilon}{\partial x_2} - (n_2^\epsilon)^2 \frac{\partial n_1^\epsilon}{\partial x_1} + n_1^\epsilon n_2^\epsilon \frac{\partial n_1^\epsilon}{\partial x_2} = \frac{1}{R^\epsilon}$$

En dérivant la relation $(n_1^\epsilon)^2 + (n_2^\epsilon)^2 = 1$ par rapport à x_1 et x_2 et en remplaçant ce résultat dans l'équation précédente on obtient (6.18).

Lemme 2: Soit $\mathbf{H}(f^\epsilon)$ la matrice Hessienne de la fonction f^ϵ et Δ l'opérateur laplacien. Alors, on a:

$$-\frac{1}{R^\epsilon} = \frac{\Delta f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} - (\nabla f^\epsilon)^t \frac{\mathbf{H}(f^\epsilon)}{(|\nabla f^\epsilon|)^3} \nabla f^\epsilon$$

Preuve: En utilisant le lemme 1 et (6.16), on trouve:

$$-\frac{1}{R^\epsilon} = \nabla \cdot \vec{n}^\epsilon = \nabla \cdot \left(\frac{1}{|\nabla F|} \nabla F \right)$$

En utilisant le fait que si a est une fonction scalaire et \vec{b} est une fonction vectorielle, on a la relation:

$$\nabla \cdot (a\vec{b}) = (\nabla a)^t \vec{b} + a \nabla \cdot \vec{b}$$

On montre le lemme en posant:

$$a = |\nabla F|^{-1} \text{ et } \vec{b} = \nabla F$$

et en utilisant la relation bien connue:

$$\nabla(|\nabla F|^{-1}) = -|\nabla F|^{-3} H(f^\epsilon) \nabla F \quad (6.19)$$

Lemme 3: Soit $\nabla f^\epsilon \odot \nabla f^\epsilon$ le produit tensoriel de ∇f^ϵ avec lui-même. Alors, on a:

$$-\frac{1}{R^\epsilon} \nabla f^\epsilon = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla f^\epsilon \odot \nabla f^\epsilon - |\nabla f^\epsilon|^2 Id}{|\nabla f^\epsilon|} \right) \quad (6.20)$$

Preuve: D'une part, le lemme 2 donne la relation:

$$-\frac{1}{R^\epsilon} = \frac{\Delta f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} - (\nabla f^\epsilon)^t \frac{H(f^\epsilon)}{(|\nabla f^\epsilon|)^3} \nabla f^\epsilon$$

ce qui implique que:

$$\begin{aligned} -\frac{(\nabla f^\epsilon)^t}{R^\epsilon} &= \frac{\Delta f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} (\nabla f^\epsilon)^t - (\nabla f^\epsilon)^t \frac{H(f^\epsilon)}{(|\nabla f^\epsilon|)^3} \nabla f^\epsilon (\nabla f^\epsilon)^t \\ &= \frac{\Delta f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} (\nabla f^\epsilon)^t - (\nabla f^\epsilon)^t \frac{H(f^\epsilon)}{(|\nabla f^\epsilon|)^3} (\nabla f^\epsilon \odot \nabla f^\epsilon) \end{aligned}$$

En transposant, on obtient facilement:

$$-\frac{(\nabla f^\epsilon)}{R^\epsilon} = \frac{\Delta f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} (\nabla f^\epsilon) - (\nabla f^\epsilon \odot \nabla f^\epsilon) \frac{H(f^\epsilon)}{(|\nabla f^\epsilon|)^3} (\nabla f^\epsilon) \quad (6.21)$$

D'autre part, si a est une fonction scalaire et B un tenseur, on a la relation bien connue:

$$\nabla(aB) = a\nabla B + B\nabla a$$

et en utilisant la relation 6.19 on conclut que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{(\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon)}{|\nabla f^\epsilon|} \right) &= \frac{1}{|\nabla f^\epsilon|} \nabla \cdot (\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon) - (\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon) \frac{H(f^\epsilon)}{|\nabla f^\epsilon|^3} \nabla f^\epsilon \\ &= (\Delta f^\epsilon Id + H(f^\epsilon)) \frac{\nabla f^\epsilon}{|\nabla f^\epsilon|} - (\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon) \frac{H(f^\epsilon)}{|\nabla f^\epsilon|^3} \nabla f^\epsilon \end{aligned}$$

où on a utilisé l'égalité:

$$\nabla \cdot (\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon) = (\Delta f^\epsilon Id + H(f^\epsilon)) \nabla f^\epsilon$$

Finalement, puisque:

$$\nabla \cdot (|\nabla f^\epsilon| Id) = |\nabla f^\epsilon| \nabla \cdot Id + \nabla \left(|\nabla f^\epsilon| \frac{1}{|\nabla f^\epsilon|} H(f^\epsilon) \nabla f^\epsilon \right)$$

on obtient le résultat en soustrayant les deux dernières équations et en comparant avec 6.21.

Remarque: Laisser tomber $(|\nabla f^\epsilon| Id)$ dans la formule (6.20) correspond à changer la valeur de la pression.

En utilisant (6.20), on peut approcher le terme de tension superficielle dans l'équation 6.12 par:

$$\int_{\Omega} \frac{C}{R} \nabla f^\epsilon \cdot \vec{v} \, d\vec{x} = - \int_{\Omega} C \left[\nabla \cdot \left(\frac{\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon - |\nabla f^\epsilon|^2 Id}{|\nabla f^\epsilon|} \right) \right] \cdot \vec{v} \, d\vec{x} \quad (6.22)$$

et en intégrant par parties ce terme devient:

$$\int_{\Omega} C \left(\frac{\nabla f^\epsilon \otimes \nabla f^\epsilon - |\nabla f^\epsilon|^2 Id}{|\nabla f^\epsilon|} \right) : \nabla \vec{v} \, d\vec{x} \quad (6.23)$$

Remarque: On note que la fonction f^e est remplacée en pratique par une fonction lisse (mais discontinue), ce qui montre que (6.23) dépend du maillage. Les résultats numériques montreront que (6.23) semble se rapprocher du dernier terme de (6.12) avec le raffinement du maillage.

On présente maintenant les résultats numériques. Pour valider la méthode proposée, on considère deux problèmes dont la dynamique est principalement due aux forces engendrées par la tension superficielle. Le premier problème consiste à placer une goutte de forme irrégulière à l'intérieur d'un autre fluide au repos. La tension superficielle génère un champ de vecteurs qui tend à minimiser l'énergie de la surface. Ce champ est particulièrement actif dans les régions où le rayon de courbure est petit. Pour atteindre l'équilibre, le système minimisera son énergie potentielle et on sait que la configuration d'énergie minimale est le cercle. Une fois la goutte transformée en un cercle parfait (de rayon R), le champ de vecteurs s'annule. De la condition naturelle (6.5), on tire qu'à l'équilibre on doit avoir la loi classique de Laplace:

$$\Delta p = \frac{C}{R} \quad (6.24)$$

La vérification de ces deux propriétés devrait être suffisante pour valider l'exactitude de la méthode proposée.

Le second problème a été choisi pour vérifier la robustesse de la méthode. Une goutte circulaire est déformée par un cisaillement constant. Dépendant de la tension superficielle et du rapport de viscosité entre les deux fluides, plusieurs scénarios de déformation sont possibles. De plus, des modèles empiriques existent pour déterminer le scénario en fonction des paramètres énoncés (voir entre autres Tsakalos [69])

et la bibliographie incluse).

6.4.1 La loi de Laplace

Pour ce problème, une goutte de forme plus ou moins carrée est introduite dans un fluide de même viscosité. Dans une situation idéalisée, des raisonnements de symétrie permettent d'effectuer les calculs sur un quart du domaine ce qui permet une plus grande précision. Les conditions frontières utilisées, la valeur des différents paramètres ainsi que le quart de la goutte initiale sont présentés à la figure 6.69. La condition initiale de la pseudo-concentration f est de 1 à l'intérieur de la goutte et 0 dans la matrice. Deux maillages différents ont été utilisés (1600 et 3600 éléments) pour montrer la convergence en fonction du maillage. Les solutions obtenues sont illustrées au figure 6.70 et 6.71. Après 200 pas de temps ($\Delta t = 0.1$) la goutte est complètement stabilisée et sa forme finale ainsi que les lignes de courant sont données à la figure 6.72. L'évolution complète de la goutte à partir de l'état initial est donné pour le deuxième maillage seulement à la figure 6.73. On remarque un champ de vecteurs résiduel dont l'intensité est très faible (la norme du plus grand vecteur du champ de vitesse étant de l'ordre de 10^{-4}). Enfin, les isopressions lorsque la goutte est stabilisée sont représentées aux figures 6.74 et 6.75. La fonction de pseudo-concentration est représentée graphiquement à la figure 6.76. Finalement, le rayon calculé R , la pression à l'intérieur de la goutte (p_g), la pression dans la matrice (p_m), la différence de pression Δp , le rapport C/R et l'erreur sont compilés dans le tableau suivant.

La correspondance est plus que satisfaisante. Il faut cependant mentionner que la mesure des différents paramètres est faite à partir du post-processeur et que ces mesures ne sont pas d'une grande précision. Tout ce que l'on peut dire c'est que pour les 2 maillages, la précision est du même ordre.

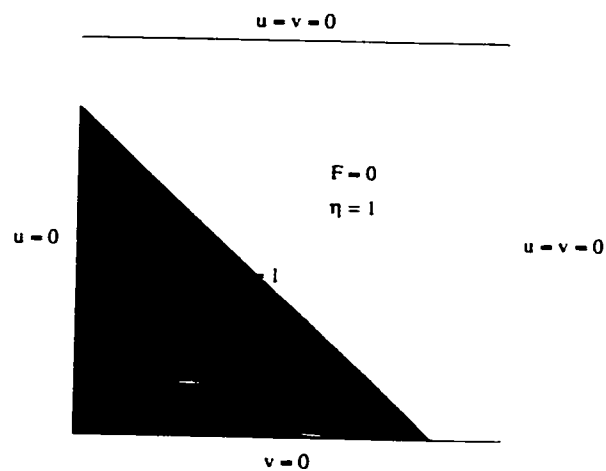


Figure 6.69 Géométrie, conditions aux frontières et initiales.

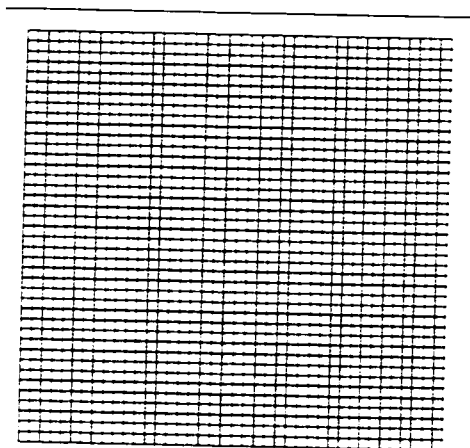


Figure 6.70 Maillage N° 1.

Tableau 6.3 Vérification de la loi de Laplace

	p_g	p_m	R	Δp	C/R	$ \Delta p - C/R $
maillage 1	0.138	0.0008	0.72669	0.1372	0.13761	0.00041
maillage 2	0.136	0.0008	0.73688	0.1352	0.13572	0.00052

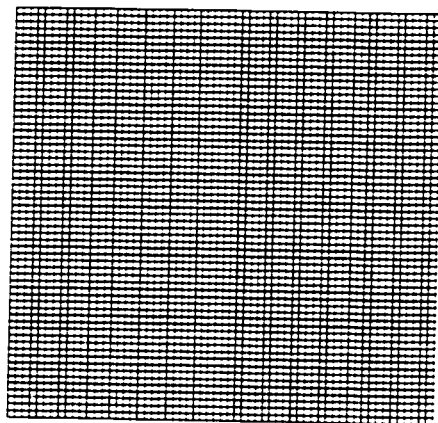


Figure 6.71 *Maillage N° 2.*

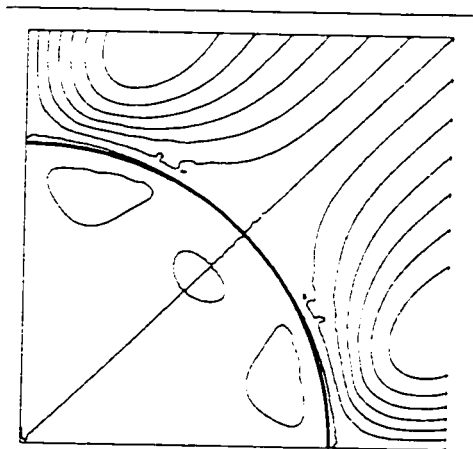


Figure 6.72 *Interface ($f = 0.5$) et lignes de courant pour le maillage N° 1.*

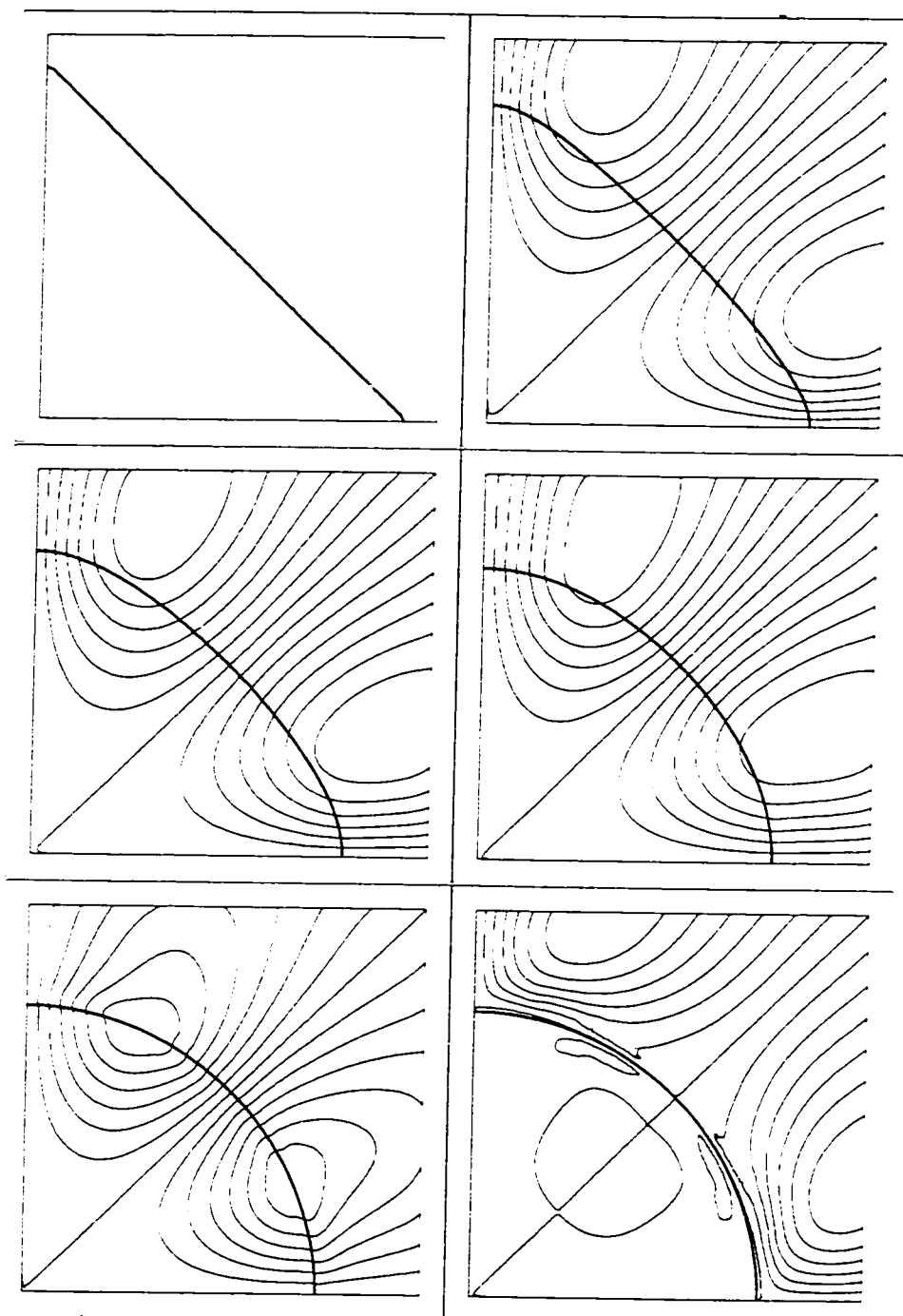


Figure 6.73 Interfaces ($f = 0.5$) et lignes de courant pour le maillage N° 2 à différents temps.

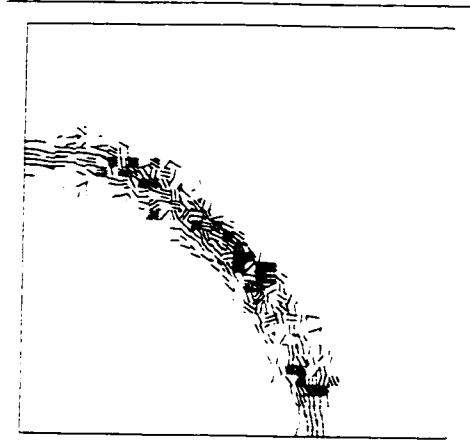


Figure 6.74 *Distribution de la pression pour le maillage N° 1.*

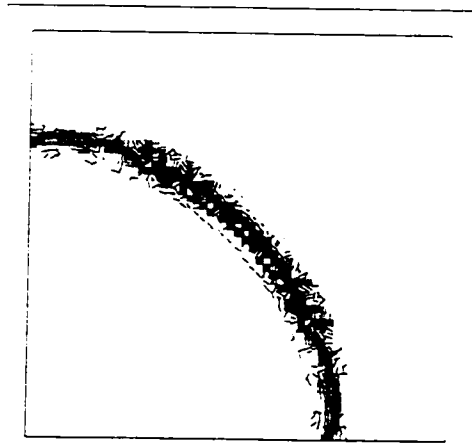


Figure 6.75 *Distribution de la pression pour le maillage N° 2.*

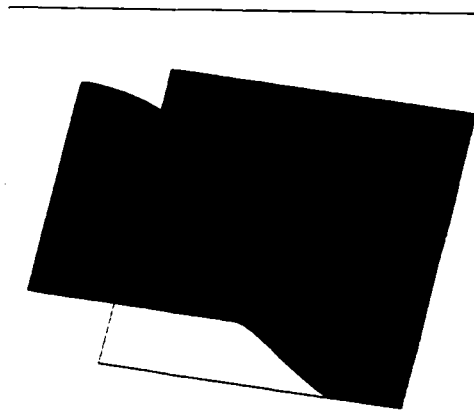


Figure 6.76 *La pseudo-concentration vu de biais pour le maillage N° 2.*

6.4.2 Déformation d'une gouttelette

La simulation numérique du second problème est effectuée pour une goutte cylindrique de rayon R_d et de longueur infinie submergée dans une matrice fluide. Le tout est placé entre deux plaques infinies qui exercent un cisaillement constant $\vec{u} = (\dot{\gamma}y, 0)$ (voir la figure 6.77). Le paramètre $\dot{\gamma}$ représente le coefficient de cisaillement et a un rôle important. Le problème d'une goutte sphérique a fait l'objet de plusieurs recherches (voir par exemple Hinch-Acrivos [35] et [36] et la bibliographie incluse). Nous devons donc être prudents dans l'interprétation des résultats numériques et le mieux que l'on puisse espérer est une comparaison qualitative des comportements.

On définit quelques paramètres qui sont déterminants pour étudier comment la goutte (le cylindre) se déformera. Le nombre capillaire Ca est défini par:

$$Ca = \frac{\dot{\gamma}\eta_m R_d}{C}$$

où η_m est la viscosité de la matrice fluide. Si η_d est la viscosité de la goutte alors:

$$q = \frac{\eta_d}{\eta_m}$$

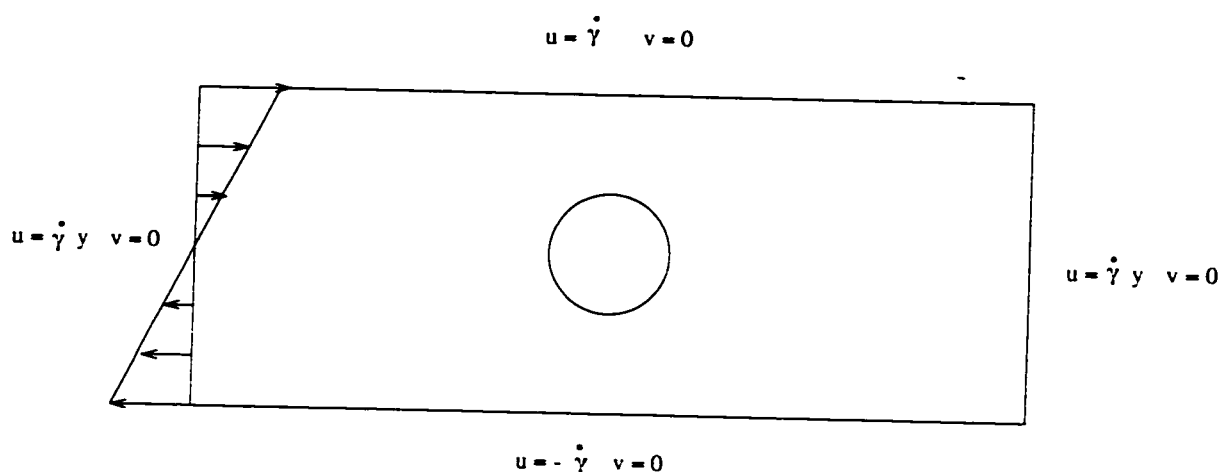


Figure 6.77 Géométrie, conditions aux frontières et initiales.

est le rapport de viscosité (on ne considère pour ce problème que des fluides newtoniens).

Des résultats expérimentaux existent pour le problème d'une goutte sphérique submergée dans un autre fluide et soumis à un cisaillement constant. On espère obtenir une concordance entre les calculs numériques et les mesures expérimentales même si les problèmes ne sont pas identiques (goutte sphérique pour les résultats expérimentaux et goutte cylindrique pour les résultats numériques). Les résultats expérimentaux font ressortir plusieurs comportements distincts. Dans certaines conditions, la goutte prend une forme ellipsoïdale de demi grand axe L et de demi petit axe B ($L \geq B$). On peut alors calculer l'angle entre le grand axe et l'horizontale.

Dans d'autres conditions, la tension superficielle étant trop faible devant l'intensité du cisaillement, les forces surfaciques n'arrivent pas à contrecarrer celles imposées par le fluide en mouvement et la goutte se scinde généralement en plusieurs gouttelettes.

De la même manière que pour les résultats expérimentaux (voir Tsakalos [69] pour une revue complète), on définit le taux de déformation comme étant:

$$D = \frac{L - B}{L + B}.$$

Des modèles ont été élaborés pour estimer D et l'angle θ . D'après Cox [13], ces valeurs sont liés au rapport de viscosité q et au nombre capillaire Ca par la relation suivante:

$$D = \frac{5(19q + 16)}{4(q + 1)\sqrt{(19q)^2 + (20/Ca)^2}} \quad (6.25)$$

et

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{19qCa}{20}\right) \quad (6.26)$$

Les résultats expérimentaux suggèrent que lorsque D devient plus grand qu'approximativement 0.5, la goutte se déforme jusqu'à la scission en gouttelettes. Une valeur approchée de la déformation D est obtenue facilement par le modèle de Taylor (voir Taylor [65]):

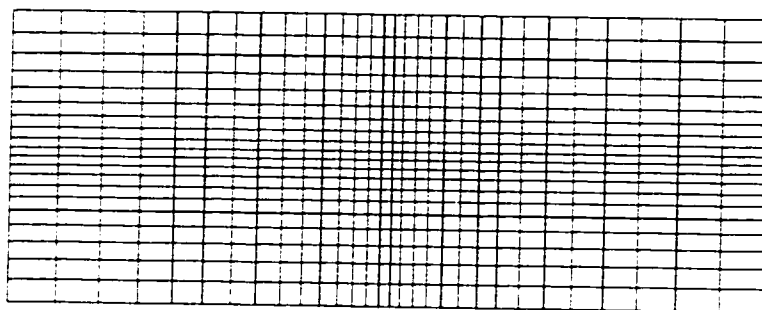
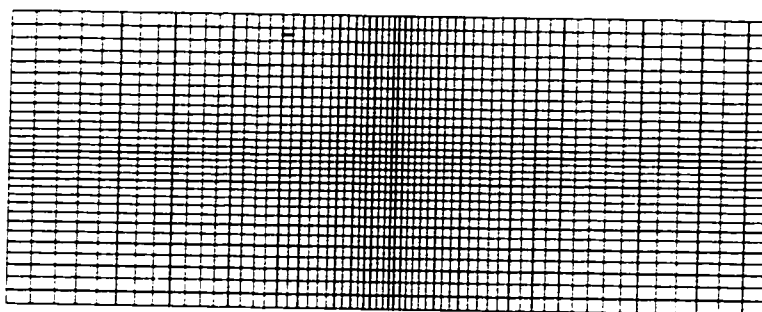
$$D = Ca \frac{19q + 16}{16q + 16} \quad (6.27)$$

En remplaçant D par 0.5, on obtient de cette dernière équation une approximation du nombre capillaire critique Ca_{cr} comme étant:

$$Ca_{cr} = 0.5 \frac{16q + 16}{19q + 16}$$

Lorsque le nombre capillaire devient plus grand que le nombre capillaire critique Ca_{cr} , la goutte se brise. Les équations (6.25) et (6.27) donnent des résultats presque identiques, le modèle de Cox étant apparemment plus précis.

Ces deux modèles sont applicables pour prédire le type de déformation qu'une goutte sphérique subira. On espère tout de même obtenir des résultats qualitativement acceptables pour notre expérience numérique. Deux maillages respectivement

Figure 6.78 *Maillage N° 1.*Figure 6.79 *Maillage N° 2.*

de 600 and 1800 éléments ont été utilisés (voir les figures 6.78 et 6.79). Ces maillages sont raffinés vers le centre, concentrant ainsi le nombre d'éléments dans un voisinage de la "goutte" initiale. Plusieurs cas ont été testés mais on en présente seulement quatre qui semblent couvrir l'étendue des possibilités.

Pour les simulations numériques une "goutte" de rayon $R_d = 0.7$ est introduite dans un domaine de calcul de 10 par 4 unités adimensionnelles. La "goutte" est ensuite soumise à un cisaillement constant dont l'intensité est plus ou moins grande d'un calcul à l'autre.

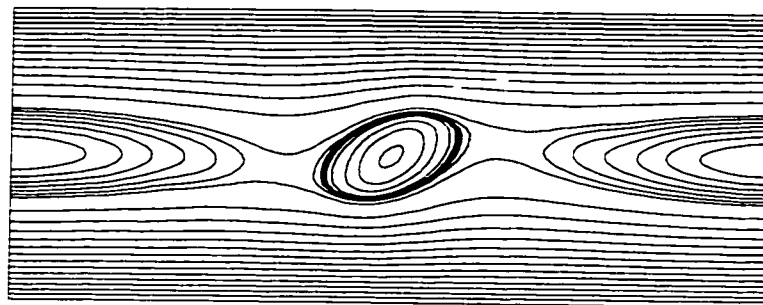


Figure 6.80 Cas N° 1. maillage 1.

6.4.2.1 Test # 1

Dans cette première simulation le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est fixé à 0.3. Les viscosités des deux fluides sont identiques et égales à 1.0. le coefficient de tension superficielle C est de 1.0 ce qui donne un nombre capillaire Ca de 0.21 et un rapport de viscosité $q = 1.0$. Des équations de Cox (6.25) et (6.26), on obtient une prédiction de $D = 0.2252$ pour la déformation et de $\theta = 39.35^\circ$ pour l'angle. Le nombre capillaire critique est 0.44 d'après l'équation de Taylor, ce qui est approximativement le double du nombre capillaire de cette simulation. On peut donc prédire que la "goutte" atteindra un équilibre, les forces de tension superficielle étant suffisamment puissantes pour contrecarrer les effets du cisaillement.

Pour ces résultats un pas de temps Δt de 0.1 a été utilisé. Après 300 pas de temps, l'écoulement devient stationnaire et la "goutte" forme un angle de 26.7° par rapport à l'axe horizontal. Les figures 6.80 et 6.81, où on peut voir les isovaleurs de f et les lignes de courant, montrent clairement que la goutte contient une zone de recirculation. La déformation D obtenue numériquement est 0.25, ce qui n'est pas très éloigné de la prédiction tridimensionnelle.

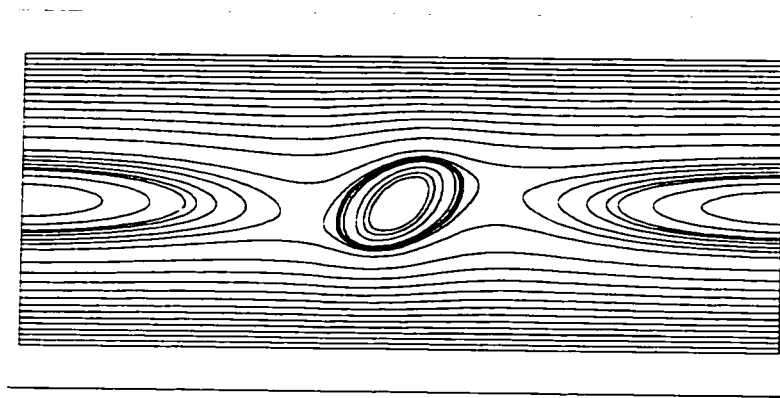


Figure 6.81 Cas N° 1. maillage 2.

6.4.2.2 Test # 2

Dans ce deuxième test, on fixe le paramètre $\dot{\gamma}$ à 0.3, les viscosités sont toujours égales à 1 et le coefficient de tension superficielle est réduit à 0.1. Ce choix de paramètres donnent un nombre capillaire Ca of 2.1 et un rapport de viscosité $q = 1.0$. Des équations de Cox on tire $D = 1.0$ et le nombre capillaire critique est 0.457. Dans ce cas, la "goutte" devrait se scinder en plusieurs autres "gouttes". La méthode reproduit qualitativement ce comportement comme on peut le voir par l'interface de f qui est donnée à la figure 6.82 pour le premier maillage. L'évolution de la goutte au fil du temps est en partie reproduite à la figure 6.83 pour le second maillage. Le maillage plus fin permet évidemment de voir des gouttelettes plus fines.

6.4.2.3 Test # 3

Dans cet avant dernier essai numérique, on utilise les paramètres suivants: le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est 1.0, la viscosité des deux fluides est de 1 et le coefficient de tension superficielle de 1.0. De ces paramètres on calcule un nombre capillaire Ca de 0.65 et un rapport de viscosité $q = 1$. De l'équation de Cox on tire que $D = 0.6$ et le nombre capillaire critique devient dans ce cas 0.457. Dans ce cas, la goutte doit se briser mais contrairement au cas précédent, les forces de tension superficielle sont encore

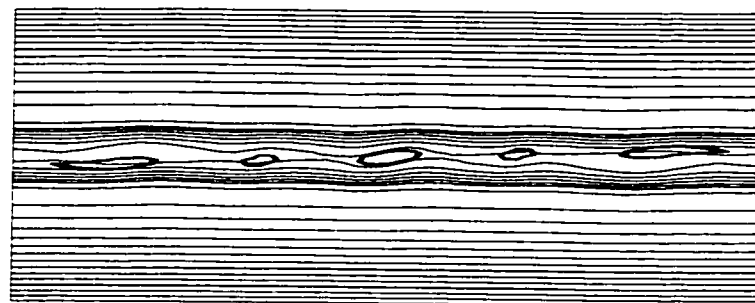


Figure 6.82 Cas N° 2. maillage 1.

relativement importantes. Le nombre capillaire est seulement légèrement supérieur au nombre capillaire critique. La goutte initiale va se scinder, mais en gouttelettes plus grosses. L'interface de la fonction de pseudo-concentration f est représentée à la figure 6.84 et l'évolution de la goutte est présentée à la figure 6.85. On observe effectivement une scission de la goutte ce qui concorde avec la prédiction du modèle de Taylor. On constate que la scission est beaucoup moins rapide que dans le cas précédent car la tension superficielle est plus importante.

6.4.2.4 Test # 4

Pour ce dernier cas test, le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est de 0.7, la viscosité de la goutte est de 0.1 alors que pour la matrice on a choisi une viscosité de 1.0. Le coefficient de tension superficielle est fixé à 1.0. Pour ces paramètres, on calcule le nombre capillaire comme étant $Ca = 0.455$ et aussi $q = 0.1$. L'équation de Cox donne $D = 0.46$ et le nombre capillaire critique est de 0.4916. Dans ce cas, on ne doit pas observer de séparation de la goutte principale. Les isovaleurs de f confirment cet affirmation et sont données aux figures 6.86 et 6.87.

Ce cas diffère des précédents en ce sens que le rapport de viscosité est très

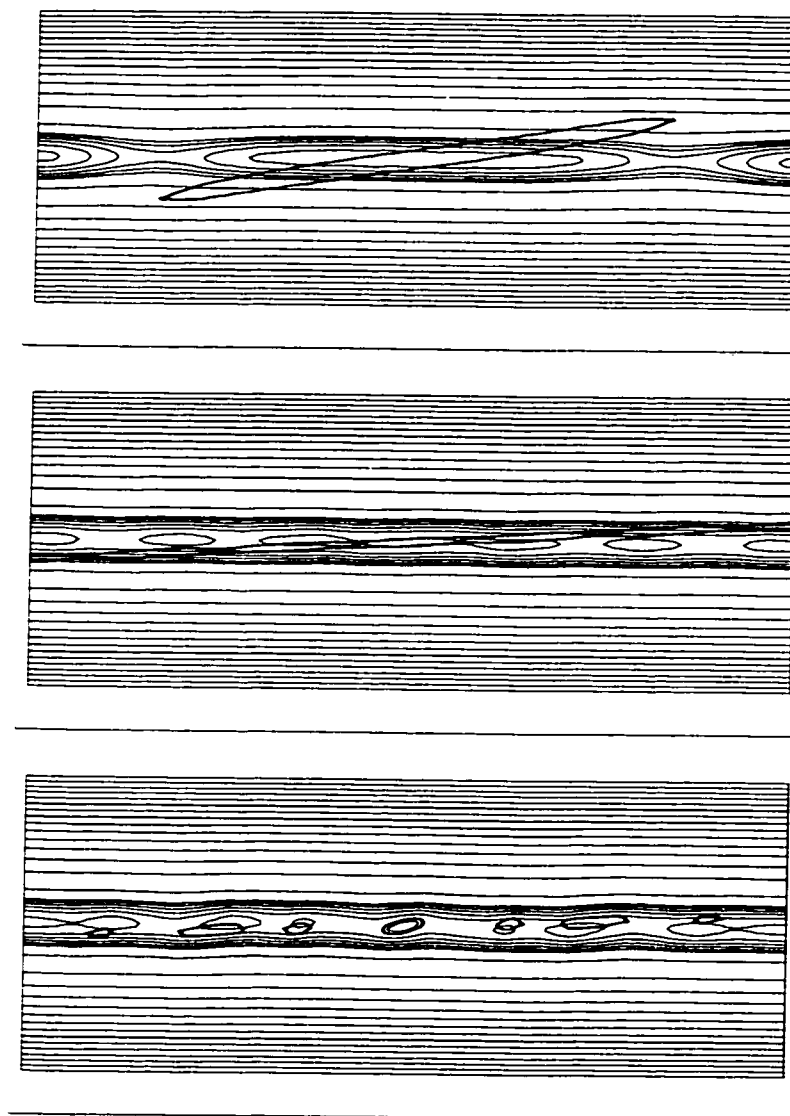


Figure 6.83 *Cas N° 2. maillage 2.*

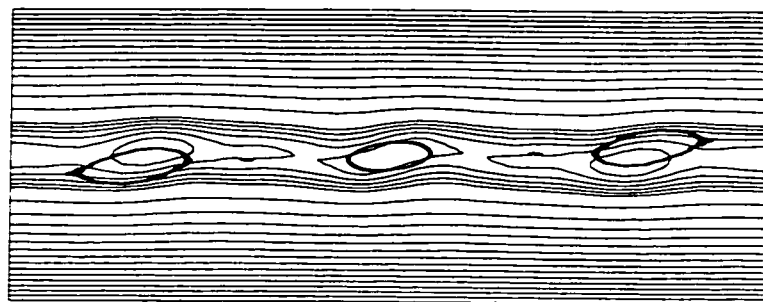


Figure 6.84 Cas N° 3. maillage 1.

faible. Or il est bien connu (voir Tsakalos [69]) que dans ce cas, la goutte se déforme non pas en ellipse mais dans une forme plus allongée rappelant vaguement un S, les extrémités de la goutte étant assez pointues. On observe une correspondance tout au moins qualitative entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux rapportés.

Comme on utilise un procédé itératif pour que $f \in [0, 1]$ sur tous les éléments, cette méthode est environ deux à trois fois moins rapide que la méthode de Lesaint-Raviart. De plus les paramètres λ et β ne sont pas conservés d'un élément à l'autre, le processus itératif doit donc reprendre ses calculs comme s'il n'avait rien calculé aux éléments adjacents. Ces deux aspects sont donc à exploiter pour améliorer la convergence du processus global.

Finalement, on note qu'une technique de raffinement de maillage (autour de l'interface) est essentielle pour ce genre de calculs. En effet, il est évident que l'erreur pour le calcul de la pseudo-concentration est principalement regroupée autour de la "discontinuité" (raffinement du maillage) et très faible là où il y a des plateaux importants (déraffinement du maillage). De plus dans le cas des deux plaques parallèles

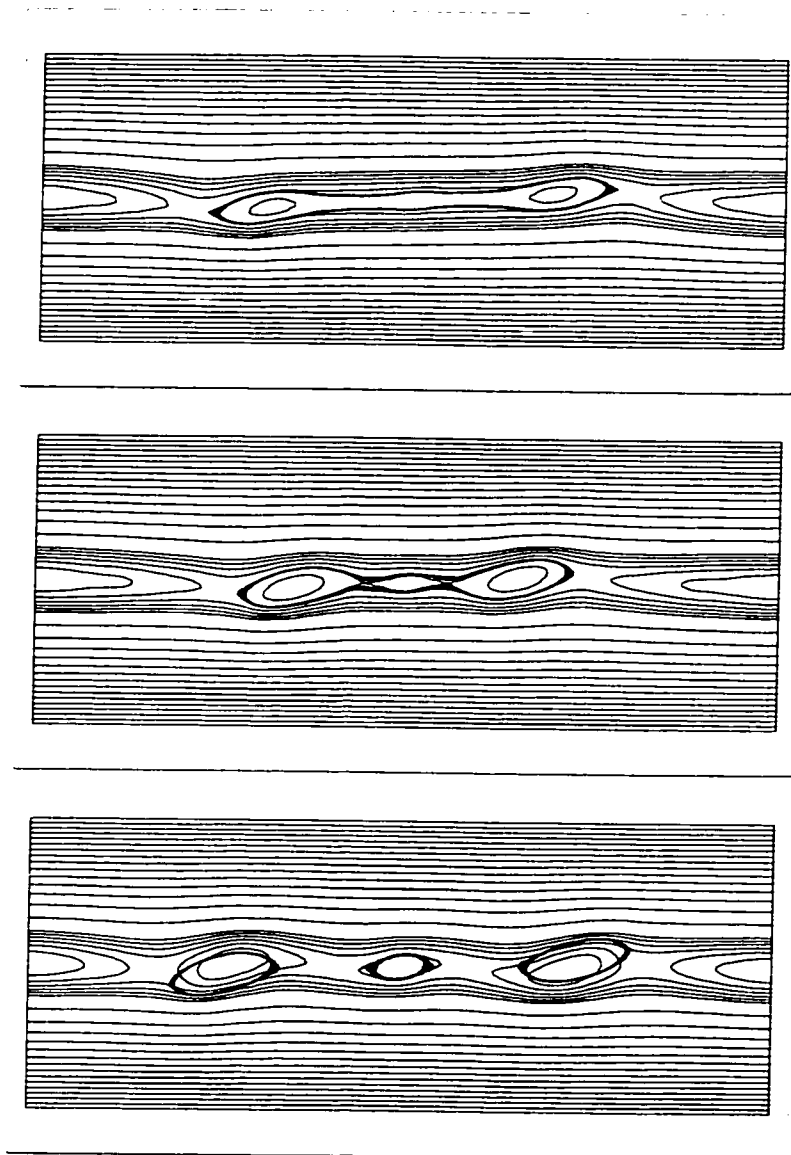


Figure 6.85 *Cas N° 3. maillage 2.*

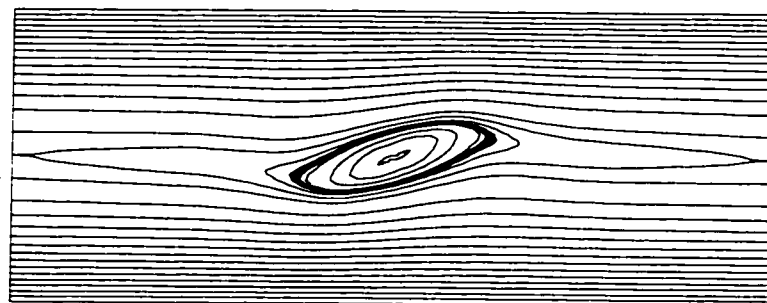


Figure 6.86 *Cas N° 4. maillage 1.*

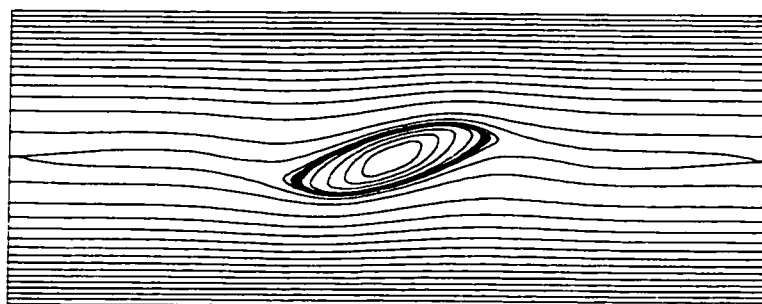


Figure 6.87 *Cas N° 4. maillage 2.*

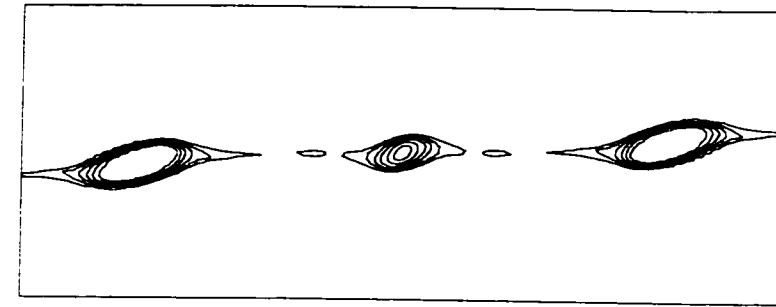


Figure 6.88 *Cas N° 4, maillage 2.*

sous un cisaillement constant, on observe un comportement extrêmement complexe de l'interface. Il est dans ce dernier cas connu que la dynamique est hautement non-linéaire [65], ce qui se traduit dans notre maillage fixe par la perte de phénomènes plus fins tels la cascade de bulles satellites décrite dans [20, 75]. On inclut une figure 6.88 qui représente la simulation 4 à des isolignes plus basses (autour de 0.25). On y voit l'existence de deux bulles satellites qui sont apparues brièvement, mais n'ont pu se former totalement et qui se diffuseront jusqu'à ce qu'elles disparaissent totalement.

On conclut donc en disant que cette méthode doit nécessairement inclure une technique de raffinement de maillage, un contrôle sur la conservation de la masse et un procédure pour améliorer la technique itérative utilisée.

CONCLUSION

Les principales contributions de cette thèse sont:

- (a) l'analyse de la méthode de Lesaint-Raviart;
- (b) l'introduction de nouvelles méthodes et en particulier l'introduction d'une méthode mixte et d'une méthode bornée;
- (c) formulation de différents critères pour obtenir une méthode d'éléments finis stable pour les problèmes purement hyperboliques (problèmes d'interpolation et de compatibilité);
- (c) l'élaboration d'une technique de moulage avec imposition d'un flux sortant;
- (d) la mise en oeuvre d'une nouvelle formulation pour la tension superficielle en éléments finis.

On remarque d'emblée que la méthode idéale n'a été obtenue que partiellement. En effet la méthode bornée donne d'excellents résultats mais souffre de certaines lacunes. Cette méthode n'est surement pas à transport exact et est non linéaire. Il semble impossible à première vue de se débarrasser de ce caractère non linéaire puisque la littérature consacrée à la capture de discontinuités ou à l'élimination des oscillations parasites en éléments finis revêt souvent ce caractère non linéaire (voir entre autres Codina [12], Franca et Madureira [28], Hughes, Malet et Mizukami [39] et Hughes et Mallet [38]) ou du moins un caractère itératif (voir Greenstadt [30]). Il en est de même en différences finies (Harten [32, 34]). Mentionnons de plus le récent article de Layton et Polman [48] paru en 1996 qui présente des méthodes basées sur le même concept que la méthode bornée discutée dans cette thèse. Une des méthodes de Layton et Polman consiste à traiter a posteriori la solution obtenue par

une projection bornée, ce qui est sensiblement la même chose que d'incorporer une technique de régularisation au sein même de l'algorithme (voir Chakravarthy [7]). En ce qui concerne le transport exact, il n'y a pas lieu de s'inquiéter outre mesure puisqu'on borne la solution dans tout l'élément K et la solution traverse l'élément pour arriver sur ∂K^+ altérée mais bornée. Si la méthode approxime $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$ raisonnablement on ne craint pas une détérioration majeure sur ∂K^+ . D'autre part cette méthode ne conserve ni la monotonie, ni la masse entrante et le transport inexact n'arrange rien à cet état de choses (possiblement pire sur ∂K^+).

Cependant, on croit avoir fait ressortir le fait que ce ne sont pas les méthodes d'approximation existantes qui sont inadéquates pour résoudre les problèmes de transport pur, mais plutôt une combinaison d'incompatibilités géométriques entre la solution f , sa condition frontière f^- et/ou la complexité du champ de vecteurs \vec{u} utilisé. Cependant, comme on le constate avec la confrontation des méthodes de Lesaint-Raviart et mixte à l'aide de *Mathematica*, même si on utilise un champ de vecteurs extrêmement simple il y a encore incompatibilité avec la condition frontière dans le cas général pour la méthode de Lesaint-Raviart.

L'expérience en différences finies montre qu'il est d'égale importance qu'un schéma numérique soit une approximation de l'équation aux dérivées partielles en question, mais doit aussi reproduire les propriétés physiques connues de la solution analytique. La méthode mixte prend alors ici toute son importance puisqu'on sait qu'elle possède essentiellement toutes les propriétés physiques voulues (elle résout presque exactement $\vec{u} \cdot \nabla f = 0$). La méthode mixte résout un des problèmes, il ne reste donc plus qu'à contrôler la condition frontière. La méthode mixte semble cependant, dans certains cas, choisir une solution dont la restriction à ∂K^- n'est

pas la fonction la plus proche de la condition frontière f^- . En effet, on a vu sur *Mathematica* que dans le premier cas la méthode mixte choisit un plan comme solution (qui semble très éloigné de f^-). Cela n'est pas une contradiction pour les trois raisons suivantes. Premièrement, c'est par définition la meilleure approximation dans l'espace des solutions $g \mid \vec{u} \cdot \nabla g = 0$ (ce qui a été confirmé sur *Mathematica* avec le programme de validation). Deuxièmement, l'étude des schémas TVD ou ENO montre qu'il est préférable de perdre un peu de précision sur l'approximation de la condition frontière lorsque l'on dispose d'un schéma à transport exact puisqu'en général une approximation d'ordre supérieur d'une condition frontière irrégulière sera oscillatoire. Les schémas TVD se résorbent en une approximation du premier ordre près des discontinuités en choisissant la droite de part et d'autre du point de calcul qui a la plus petite pente (limiteur de pente ou de flux). Les méthodes ENO pour leur part reprennent la même idée en choisissant, parmi les trois paraboles possibles contenant le point d'approximation, celle qui est la moins oscillante. On renvoie le lecteur aux articles de Osher et Chakravarthy [55] et Harten et Osher [34] pour de telles considérations. C'est un peu ce que fait la méthode mixte en choisissant une approximation plus pauvre mais à transport *essentiellement exact*. Troisièmement, si on savait choisir une projection bornée de la solution, on aurait alors un schéma ENO. De plus, si la projection conservait la masse et la monotonie, on aurait alors un schéma TVD, ce qui n'est pas garanti avec les autres types de méthodes. Finalement, des projections de ce type ont commencé à apparaître mais ne sont pas complètement implémentées. Il s'agit d'incorporer un maximum de propriétés de la condition initiale f^- dans la méthode mixte elle-même en changeant la norme sur ∂K^- ou par le biais de contraintes supplémentaires. Ceci n'a pas été poussé à sa limite par manque de compréhension puisque l'on croyait suffisant de contrôler la condition frontière avant d'appliquer le schéma. Maintenant on sait que le schéma changera de façon "imprévisible" la projection introduite à la place de f^- . Il est

évidemment plus difficile de chercher à connaître les conditions nécessaires sur la projection qui assureront un bon transfert dans l'élément K que d'introduire des mécanismes de contrôle directement dans le schéma.

Une approche qui se voulait dans cet ordre d'idées est la méthode de diffusion orthogonale dans K mais comme on l'a vu, le choix de la diffusion correcte à utiliser par élément reste encore à déterminer. De récentes discussions avec mon collègue S. Dufour ont débouché sur la lecture de deux articles, l'un de Franca et Madureira [28] et l'autre de Codina [12]. Le premier préconise une méthode d'éléments finis stabilisée à l'aide d'un paramètre variable qui dépend principalement du nombre de Peclet local. Le second penche vers une méthode de diffusion perpendiculaire à l'écoulement. Ces deux articles se rapprochent de nos considérations et on espère y trouver des réponses concernant l'application de diffusion localement.

En ce qui concerne les essais numériques du chapitre des résultats, l'utilisation de méthodes plus stables pour calculer la pseudo-concentration ne semble pas affecter grandement les résultats obtenus avec une méthode plus classique. On mentionne cependant que dans le cas de la tension superficielle, des gradients parasites empêchaient la stabilisation complète de la bulle surtout au niveau de la pression. Il semble dans ce cas que l'utilisation d'une méthode plus stable ait permis d'obtenir une stabilisation de la pression presque parfaite.

On termine finalement en disant que l'approximation par éléments finis du problème de convection doit sans doute passer par le maillage adaptatif. Effectivement, si on peut aligner le moins possible les éléments près de l'interface avec le champ de vecteurs, les effets oscillatoires en seront grandement réduits. Cette remarque est justifiée par les scénarios extrêmement complexes dans le cas de la scission d'une

goutte en un chapelet de gouttelettes. Pour capturer toute la complexité de l'écoulement on ne peut se permettre d'avoir trop de diffusion à l'interface (les gouttelettes pouvant devenir extrêmement petites, voir[68]). De plus, les forces dues à la tension superficielle seront d'autant mieux approximées si on a un gradient bien défini, ce que l'on pourrait obtenir par l'utilisation du maillage adaptatif. Des travaux sont actuellement en cours à ce sujet et on réfère aux travaux de Dufour [19].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARMINJON, P. (1986). Some aspects of high resolution numerical methods for hyperbolic system of conservation laws, with applications to gas dynamics. *INRIA Rapport de recherche 529*, pages 1–90.
- [2] ARMINJON, P. et DERVIEUX, A. (1989). Construction of TVD-like artificial viscosities on 2-dimensional arbitrary fem grids. *INRIA Rapport de recherche 1111*.
- [3] BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. et HASSAGER, O. (1977). *Dynamics of Polymeric Liquids*. John Wiley, New York.
- [4] BRACKBILL, J. U., KOTHE, D. B. et ZEMACH, C. (1992). A continuum method for modeling surface tension. *Journal of Computational Physics*, 100:335–354.
- [5] BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag.
- [6] CARRIER, P. (1993). Calcul des surfaces libres de procédés de mise en forme des polymères. Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [7] CHAKRAVARTHY, R. et OSHER, S. (1985). Computing with high-resolution upwind schemes for hyperbolic equations. *Lectures in Applied Mathematics*, 22:57–86.
- [8] CHAKRAVARTHY, S. R. (1985). A new class of high accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws. *AIAA 85-0363*, pages 1–11.
- [9] CHAKRAVARTHY, S. R. et OSHER, S. (1983). Numerical experiment with the Osher upwind scheme for the euler equations. *AIAA Journal*, 21:1241–1248.

- [10] CHAPLEAU, S. (1995). Formulations mixtes stabilisées pour les écoulements viscoélastiques. Mémoire de Maîtrise, École Polytechnique de Montréal.
- [11] CIARLET, P.G. (1978). *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland, Amsterdam.
- [12] CODINA, R. (1995). A discontinuity-capturing crosswind-dissipation for finite element solution of the convection-diffusion equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 120:45–64.
- [13] COX, R. G. (1969). The deformation of a drop in a general time-dependent fluid flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 37:601–623.
- [14] DAVIS, S. F. (1984). TVD finite difference schemes and artificial viscosity. *ICASE Report, No. 84-20*.
- [15] DEMAY, Y., BÉLIVEAU, A. et FORTIN, A. (1997). A numerical method for the deformation of two-dimensional drops with surface tension. *Soumis à Int. J. of Comp. Fluid Mechanics*.
- [16] DHATT, G., GAO, D. N., MÉDAL, M. et SONG, R. (1992). Remplissage et solidification par éléments finis. *Revue européenne des éléments finis*, 1:309–332.
- [17] DHEUR, J. et CROCHET, M. J. (1987). Newtonian stratified flow through an abrupt expansion. *Rheologica Acta*, 26:401–413.
- [18] DHEUR, J. et CROCHET, M. J. (1989). Stratified flows of newtonian and viscoelastic fluids. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 32:1–18.
- [19] DUFOUR, S. Méthodes d'éléments finis adaptatives pour les écoulements à plusieurs phases liquides. Thèse de Doctorat, École Polytechnique de Montréal, à paraître.

- [20] ELEMANS, P. H. M., JANSSEN, J. M. et MEIJER, H. E. (1990). The measurement of interfacial tension in polymer/polymer systems: The breaking thread method. *Journal of Rheology*, 34:1311–1325.
- [21] FAUCHON, D., TANGUY, P. A. et DANNELONGUE, H. H. (1989). A rigorous 2-d mold filling model using the finite element method. *Numiform 89*, 100:259–263.
- [22] FORTIN, A. (1988). On the imposition of a flowrate by an augmented lagrangian method. *Communications in Applied Numerical Methods*, 4:835–841.
- [23] FORTIN, A., BÉLIVEAU, A. et DEMAY, Y. (1995). Numerical solution of transport equations with applications to non-newtonian fluids. In *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*. Longman, England.
- [24] FORTIN, A., DEMAY, Y. et AGASSANT, J. F. (1992). Computation of stationary interfaces between generalized newtonian fluids. *Revue européenne des éléments finis*, 1:181–196.
- [25] FORTIN, A., ZINE, A. et AGASSANT J.F. (1992). Computing viscoelastic fluid flow problems at low cost. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 45:209–229.
- [26] FORTIN, M. et GLOWINSKI, R. (1983). *Augmented Lagrangian Methods*. North-Holland, Amsterdam.
- [27] FORTIN, M., GUÉNETTE, R. et PIERRE, R. (1997). Numerical analysis of the modified evss method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143:79–96.

- [28] FRANCA, L. P. et MADURIERA, A. L. (1993). Element diameter free stability parameters for stabilized methods applied to fluids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 105:395–403.
- [29] GODUNOV, S. K. (1959). A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics. *Math. Sbornik*, pages 271–306.
- [30] GREENSTADT, J. (1993). The removal of overshoot in P.D.E. solution by the use of special basis functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:325–342.
- [31] GUÉNETTE, R. et FORTIN, M. (1995). A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 60:27–52.
- [32] HARTEN, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393.
- [33] HARTEN, A. (1991). Recent developments in shock-capturing schemes. *NASA Contractor Report 187502*, pages 1–11.
- [34] HARTEN, A. et OSHER, S. (1987). Uniformly high-order accurate essentially non-oscillatory schemes, I. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 24:279–309.
- [35] HINCH, E. J. et ACRIVOS, A. (1979). Steady long slender droplets in two-dimensional straining motion. *Journal of Fluid Mechanics*, 91:401–414.
- [36] HINCH, E. J. et ACRIVOS, A. (1980). Long slender drops in simple shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 98:305–328.
- [37] HIRT, C. W. et NICHOLS, B. D. (1981). Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of Computational Physics*, 39:201–225.

- [38] HUGHES, T. J. R. et MALLETT, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics IV. a discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:329–336.
- [39] HUGHES, T. J. R., MALLETT, M. et MIZUKAMI A. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics II. beyond supg. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54:341–355.
- [40] JOHNSON, C. (1990). *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [41] JOHNSON, C. et PITKÄRANTA, J. (1986). An analysis of the discontinuous galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Mathematics of Computation*, 46:1–26.
- [42] JOHNSON, C., NÄVERT, U. et PITKÄRANTA, J. (1984). Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45:285–312.
- [43] KARDESTUNCER, H. et NORRIE, D. (1987). *Finite Element Handbook*. McGraw-Hill.
- [44] KHOAN, V. (1972). *Distributions Analyse de Fourier, Operateurs aux Dérivées partielles, Tome 1 et 2*. Vuibert, Paris.
- [45] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S. et ZANNETTI, G. (1994). Modeling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *Journal of Computational Physics*, 113:134–147.
- [46] LANDAU, L. D. et LIFSHITZ, E. M. (1987). *Course of Theoretical Physics, Volume 6*. Pergamon Press.

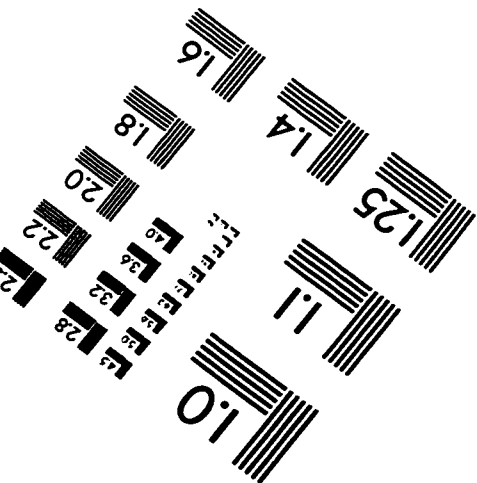
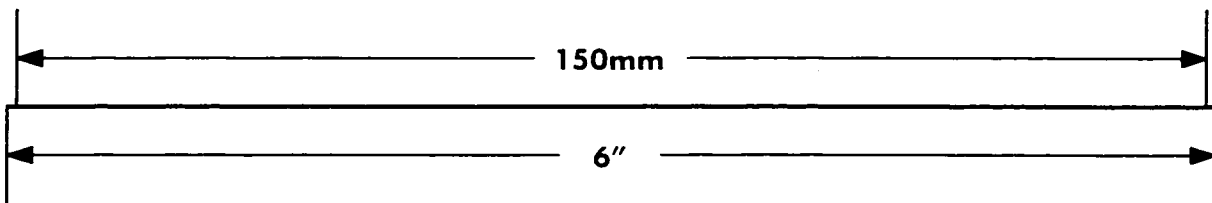
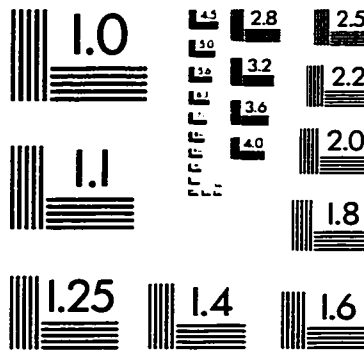
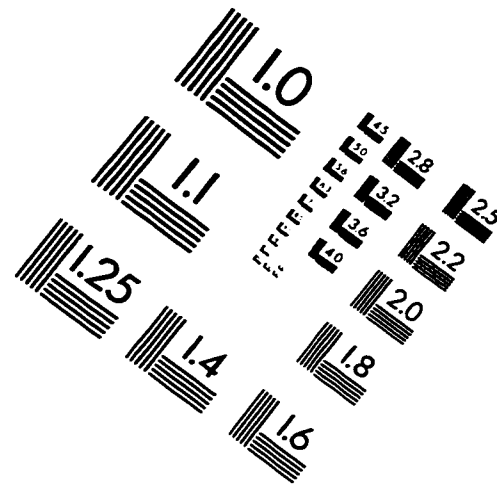
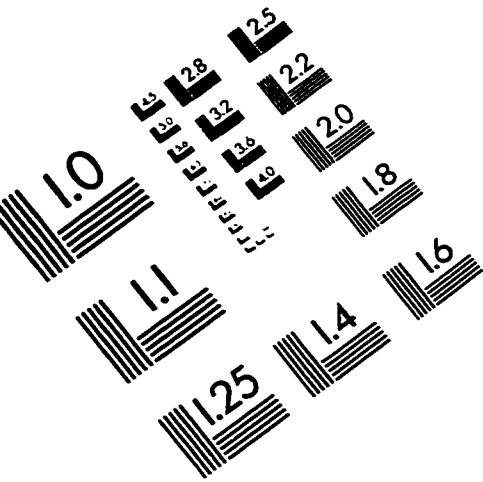
- [47] LAX, P. D. (1973). Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *SIAM, Regional Conference Serie in Applied Mathematics*, pages 1–48.
- [48] LAYTON, W. et POLMAN, B. (1996). Oscillation absorbtion finite element methods for convection-diffusion problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 6:1328–1346.
- [49] LESAINT, P. et RAVIART, P. A. (1974). On a finite element method for solving the neutron transport equation. In C. de BOOR, éditeur, *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Problems*, pages 89–119. Academic Press.
- [50] LIONS, J. L. (1976). *Analyse numérique des inéquations variationnelles, tome 1*. Dunod, Paris.
- [51] LUO, H., BAUM, J. D. et LÖHNER, R. (1995). A finit volume scheme for hydrodynamic free boundary problems on unstructured grids. *AIAA 95-0668*.
- [52] MARCHAL, J. M., DEVAUX, J. M. et CROCHET, M. J. (1989). Numerical prediction of viscoelastic extrudate swell. In *NUMIFORM 89*, pages 17–22, Rotterdam. Balkema.
- [53] NÄVERT, U. (1981). A finite Element Method for Convection-Diffusion Problems. Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Chalmer.
- [54] OSHER, S. (1984). Riemann solvers, the entropy conditin, and difference approximations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21:217–235.
- [55] OSHER, S. et CHAKRAVARTHY, S. (1984). High resolution schemes and the entropy condition. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21:955–984.

- [56] PERROCHET, P. et AZIÉRAD, P. (1995). Space-time integrated least-square: Solving a pure advection equation with a pure diffusion operator. *Journal of Computational Physics*, pages 183–193.
- [57] PHAN THIEN, N. et TANNER R. I. (1977). A new constitutive equation derived from network theory. *Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:353–365.
- [58] PUTTI, M., YEH, W. W.-G. et MULDER, W. A. (1990). A triangular finite volume approach with high-resolution upwind terms for the solution of ground-water transport equations. *Water resource research*, 26:2865–2886.
- [59] RAVIART, P. A. et THOMAS, J. M. (1983). Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. In *Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise sous la Direction de P. G. Ciarlet et J.-L. Lions*. Masson, Paris.
- [60] ROE, P. L. (1982). Fluction and signals - a framework for numerical evolution problems. In MORTON, K. W. et BAINES, M. J., éditeur, *Royal Aircraft Establishment, Numerical Methods for Fluid Dynamics*, pages 219–257. Academic Press.
- [61] SCHWARTZ, L. (1979). Analyse hilbertienne. In *Collection grep VoMéthodes*. Hermann, Paris.
- [62] SEGEL, A. (1987). *Mathematics Applied to Continuum Mechanics*. Dover Publication Inc., New-York.
- [63] SHEN, S. F. (1992). Grapplings with the simulation of non-newtonian flows in polymer processing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34:701–723.

- [64] SWEBY, P. K. (1984). High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 21:995–1011.
- [65] TAYLOR, G. I. (1932). The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. *Proceedings of the Royal Aircraft Establishment*, 138:41–57.
- [66] THOMPSON, E. (1986). Use of pseudo-concentration to follow creeping viscous flows during transient analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 6:749–761.
- [67] THOMPSON, E. et SMELSER, R. E. (1988). Transient analysis of forging operation by the pseudo-concentration method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25:177–189.
- [68] TIAHJADI, M., OTTINO, M. et STONE, H. A. (1994). Estimating interfacial tension via relaxation of drop shapes and filament breakup. *Fluid Mechanics and Transport Phenomena*, 40:385–394.
- [69] TSAKALOS, V. T. (1995). Mécanismes d'Établissement des Morphologies dans les Mélanges de Polymères en Cisaillement Simple-Relation avec le Comportement Rhéologique. Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [70] VAN LEER, B. (1973). Towards the ultimate conservation difference scheme I. the quest of monotonicity. *Journal of Computational Physics*, 18:163–173.
- [71] VAN LEER, B. (1974). Towards the ultimate conservation difference scheme II. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370.

- [73] VAN LEER. B. (1977). Towards the ultimate conservation difference scheme IV. a new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*. 23:276-299.
- [74] VAN LEER. B. (1979). Towards the ultimate conservation difference scheme V. a second-order sequel to Godounov's method. *Journal of Computational Physics*. 32:101-136.
- [75] WATKINS. V. H. et HOBBS. S. Y. (1993). Determination of interfacial tension between bpa polycarbonate and styrene-acrylonitrile copolymers from capillary instability measurements. *Polymer*. 34:3955-3959.
- [76] YEE. H. S., WARMING. R. F. et HARTEN. A. (1983). Implicit total variation diminishing (TVD) schemes for steady-state calculations. *AIAA 6th Computational Fluid Dynamics conference*. pages 110-127.
- [77] ZIENKIEWICZ. O. C. (1989). *The Finite Element Method*. Mc Graw-Hill. London.

IMAGE EVALUATION TEST TARGET (QA-3)



APPLIED IMAGE, Inc
1653 East Main Street
Rochester, NY 14609 USA
Phone: 716/482-0300
Fax: 716/288-5989

© 1993, Applied Image, Inc., All Rights Reserved

